



Алгебра



7



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО



Алгебра

7

класс

Учебник

для общеобразовательных
организаций

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

2 - е издание

Москва
«Просвещение»
2014

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы: *Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович,
Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова*

Учебник имеет **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАН № 10106-5215/292 от 12.10.12), **педагогической** (заключения РАО № 01-5/7д-250 от 11.10.12 и № 289 от 29.01.14) и **общественной** (заключение РКС № 318 от 07.02.14) экспертиз

Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций /
А45 [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.] —
2-е изд. — М. : Просвещение, 2014. — 287 с. : ил. —
ISBN 978-5-09-032509-7.

Содержание учебника позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС основного общего образования. Учебный текст разбивается на смысловые фрагменты специальными знаками и завершается вопросами, позволяющими проверить, как понято прочитанное. В систему упражнений включены такие виды деятельности, как анализ информации, наблюдение и рассуждение, конструирование алгоритмов, поиск закономерностей, исследование и т. д. Всё это позволяет учащимся активно и осознанно овладевать универсальными учебными действиями. Каждая глава завершается разделом «Чему вы научились», помогающим ученику проверить себя на базовом уровне и оценить возможность выполнения более сложных заданий.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-032509-7

© Издательство «Просвещение», 2013
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2013
Все права защищены

Предисловие

С 1 по 6 класс вас сопровождал учебник под названием «Математика». В этом году вы продолжаете изучение этой древней и замечательной науки, но теперь учебник называется «Алгебра». Алгебра — это ещё одна из старейших ветвей математики наряду с известными вам арифметикой и геометрией.

Раскрывая учебник математики, вы могли легко определить, изучению какого раздела посвящены эти страницы: арифметике или геометрии. Там, где шло изучение арифметики, были числа: целые и дробные, положительные и отрицательные — и, конечно, различные действия над ними. А в геометрических главах вам непременно встречались линии, многоугольники, окружности и другие геометрические фигуры. Полистайте учебник алгебры — здесь вы тоже обнаружите числа, знаки сложения и вычитания, равенства и неравенства, могут встретиться и геометрические фигуры. И повсюду вы увидите буквы латинского алфавита. Зачем математике, кроме чисел и фигур, понадобились буквы, формулы, как с помощью алгебраических приёмов легко и красиво можно решать самые разные задачи, вы и узнаете, изучая алгебру.

Продолжая изучение математики, мы с вами попробуем придать более точный математический смысл словам, которые вы наверняка слышали и в обыденной речи, и на уроках математики. Это такие слова, как: пропорция, координаты, график, вероятность. Кроме того, вы узнаете о неизвестных вам ранее свойствах этих математических понятий.

Открывать новые страницы живой, увлекательной, но, как вы уже знаете, совсем не простой науки — математики вам поможет наш учебник. Устроен он так же, как и уже знакомые вам учебники математики для 5 и 6 классов.

Заглянув в оглавление, вы увидите, что курс разбит на 9 глав — 9 важных этапов, которые вам предстоит пройти. Главы делятся на пункты. Если вы откроете учебник наугад, то сориентироваться, где вы находитесь, поможет специальная строка вверху этой страницы (такая строка имеет своё название — колонтитул).

Каждый пункт содержит объяснительный текст и упражнения. Объяснительный текст разбит на несколько фрагментов (их номера указаны на полях учебника), поэтому читать его можно в несколько приёмов. Ответив на вопросы и выполнив задания, размещённые в конце текста, вы сможете осмыслить прочитанное, проверить, хорошо ли его поняли.

Главное, что надо понять и запомнить, выделено в тексте так:

Разностью чисел a и b называют такое число, которое в сумме с числом b даёт число a .

Новые термины даны **жирным** шрифтом, а некоторые слова и целые фразы, на которые следует обратить внимание, выделены *курсивом*.

Если вы захотите вспомнить, что означает то или иное слово, встречавшееся вам в учебнике ранее, содержание какого-либо правила, то можете обратиться к **предметному указателю**. В нём в алфавитном порядке дан перечень наиболее важных сведений и указаны страницы, на которых можно найти соответствующие разъяснения.

Упражнения в пунктах разделены на группы **А** и **Б**.

Прежде всего следует научиться выполнять задания группы **А**. Задания группы **Б** труднее, но каждому надо попытаться решить хотя бы некоторые из них. Ведь так здорово разобраться в чём-то, что казалось поначалу трудным, и так приятно, когда понимаешь, как решается хитрая задача.

При изучении математики необходимо постоянно контролировать себя. В этом вам поможет раздел «**Чему вы научились**», он завершает каждую главу. Откройте учебник на странице 70. Вы увидите вопросы по теории, на которые надо уметь отвечать (рубрика «**Это надо знать**»), и задания, которые надо научиться решать (рубрика «**Это надо уметь**»). Проверить, как усвоен материал главы, вам поможет тест (рубрика «**Проверьте себя**»). Без этих знаний вы не сможете изучать следующие разделы, двигаться дальше в изучении математики.

Каждая глава содержит также материал, который позволит вам выйти за рамки круга обязательных вопросов, углубить свои знания, познакомиться с новыми приёмами решения задач. Это пункты с подзаголовком «*Для тех, кому интересно*» и рубрика «**Дополнительные задания к главе**».

Изучая математику, решая математические задачи, вы тренируете свой ум, развиваете свои умственные способности, учитесь мыслить, рассуждать, анализировать, делать выводы, подмечать закономерности, строить алгоритмы, искать пути и способы решения проблем. А это необходимо каждому человеку, чем бы он ни занимался в жизни.

Желаем вам успехов!

Авторы

Дроби и проценты

Алгебра тесно связана с арифметикой, она возникла в древние времена в результате поисков общих схем решения похожих арифметических задач. Вот и мы начнём с арифметики. Вы уже знаете, что есть два способа записи дробных чисел — в виде обыкновенных и в виде десятичных дробей. Значит, нужно уметь сравнивать числа, записанные в любой из этих форм, уметь проводить вычисления, если среди чисел, с которыми надо выполнить арифметические действия, есть и обыкновенные, и десятичные дроби. С понятием дроби, как вам уже известно, связано понятие процента. Поэтому, чтобы решать задачи на проценты, нужно свободно переходить от дробей к процентам и наоборот. В дробях нередко представляют и различные статистические характеристики, с которыми вы также познакомитесь в этой главе.

1.1 Сравнение дробей

1 Сравнивая две обыкновенные дроби, вы пользовались разными приёмами. Теперь мы познакомимся ещё с одним, который можно применить к любым двум обыкновенным дробям. Сначала рассмотрим числовой пример.

Возьмём дроби $\frac{5}{7}$ и $\frac{9}{13}$ и выясним, какая из них больше. Для этого приведём их к общему знаменателю:

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 13}{7 \cdot 13}, \quad \frac{9}{13} = \frac{9 \cdot 7}{13 \cdot 7}.$$

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше. Таким образом, задача свелась к сравнению произведений $5 \cdot 13$ и $9 \cdot 7$. Так как $5 \cdot 13 = 65$, а $9 \cdot 7 = 63$, то $5 \cdot 13 > 9 \cdot 7$. Значит, $\frac{5}{7} > \frac{9}{13}$.

Решим теперь эту же задачу в общем виде, прибегнув к буквенной записи. Пусть даны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где a, b, c, d — натуральные числа. Приведём их к общему знаменателю: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$.

Отсюда ясно, что

если $ad > bc$, то $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; если $ad < bc$, то $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$;

если $ad = bc$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Мы получили *правило* сравнения обыкновенных дробей, которое иногда называют *перекрёстным*:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

Рассмотрим примеры сравнения дробей.

Пример 1. Сравним дроби $\frac{11}{26}$ и $\frac{17}{32}$.

Воспользуемся перекрёстным правилом. Так как $11 \cdot 32 = 352$, $26 \cdot 17 = 442$, то $11 \cdot 32 < 26 \cdot 17$. Значит, $\frac{11}{26} < \frac{17}{32}$.

2 **Пример 2.** Сравним дроби $\frac{5}{8}$ и $0,65$.

Решить эту задачу можно, например, так: записать число $0,65$ в виде обыкновенной дроби и затем воспользоваться перекрёстным правилом.

Но есть и другая возможность: дробь $\frac{5}{8}$ обращается в десятичную (объясните почему), поэтому задачу можно свести к сравнению двух десятичных дробей. А со сравнением десятичных дробей дело обстоит проще.

Так как $\frac{5}{8} = 0,625$, а $0,625 < 0,65$, то $\frac{5}{8} < 0,65$.

Пример 3. Даны числа $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$ и $0,54$. Расположим их в порядке возрастания.

Здесь также возможны разные способы рассуждений. Конечно, удобнее было бы иметь дело с десятичными дробями. Однако дроби $\frac{7}{12}$ и $\frac{8}{15}$ в десятичные не обращаются. Можно также представить дробь $0,54$ в виде обыкновенной и затем с помощью перекрёстного правила сравнить обыкновенные дроби попарно. Но этот путь весьма трудоёмкий.

И всё-таки можно воспользоваться десятичными дробями. В самом деле, заменим дроби $\frac{7}{12}$ и $\frac{8}{15}$ их приближёнными десятичными значениями. Для этого разделим числитель каждой из них на знаменатель, причём техническую работу, т. е. сам процесс деления, поручим калькулятору.

При делении 7 на 12 на экране калькулятора высветится длинное число 0,5833333. Так как для наших целей достаточно знать цифру сотых, то будем считать, что

$$\frac{7}{12} \approx 0,58.$$

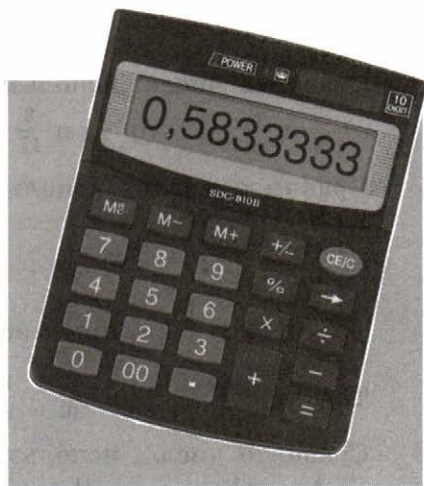
Точно так же найдём, что

$$\frac{8}{15} \approx 0,53.$$

Теперь нужно упорядочить десятичные дроби 0,58; 0,53 и 0,54. Так как $0,53 < 0,54 < 0,58$, то

$$\frac{8}{15} < 0,54 < \frac{7}{12}.$$

В заключение подчеркнём, что в наших рассуждениях речь шла только о положительных дробях. Если же среди чисел есть отрицательные, то следует пользоваться общими правилами сравнения положительных и отрицательных чисел. Например, $0,01 > -0,948$, так как любое положительное число больше любого отрицательного числа; $-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}$, так как $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.



- Как с помощью перекрёстного правила сравнить обыкновенные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ (фрагмент 1)? Проиллюстрируйте правило на примере сравнения дробей $\frac{11}{25}$ и $\frac{19}{45}$.

Каким другим способом можно воспользоваться при сравнении данных дробей?

- Расскажите, как сравнивают обыкновенную дробь и десятичную. Покажите разные способы сравнения чисел 0,35 и $\frac{3}{20}$ (пример 2).
- Разберите пример 3 и ответьте на вопросы: в чём основная идея предложенного решения? Какое преимущество дало использование калькулятора?
- 1) Сравните, используя калькулятор, числа $\frac{8}{35}$ и $\frac{11}{49}$.
 - 2) Расположите в порядке убывания числа $\frac{7}{15}$; $\frac{20}{43}$; 0,466.
- Вспомните, каким правилом пользуются при сравнении положительного числа и отрицательного; двух отрицательных чисел. Сравните:

$$-3,3 \text{ и } 0,3; -\frac{1}{6} \text{ и } -\frac{1}{7}.$$

А

- 1 Сравните числа, используя перекрёстное правило:

а) $\frac{5}{9}$ и $\frac{7}{11}$; б) $\frac{4}{21}$ и $\frac{3}{17}$; в) $\frac{7}{12}$ и $\frac{9}{16}$; г) $\frac{5}{8}$ и $\frac{8}{13}$.

- 2 Сравните числа, используя приём сравнения с «промежуточным» числом:

а) $\frac{11}{18}$ и $\frac{10}{23}$; б) $\frac{5}{28}$ и $\frac{11}{40}$; в) $\frac{49}{53}$ и $\frac{41}{40}$; г) $\frac{9}{22}$ и $\frac{27}{50}$.

Образец. Сравним числа $\frac{25}{62}$ и $\frac{49}{80}$.

Так как $\frac{25}{62} < \frac{1}{2}$, а $\frac{49}{80} > \frac{1}{2}$, то $\frac{25}{62} < \frac{49}{80}$.

- 3 Сравните числа, используя любой удобный вам способ:

а) $\frac{3}{7}$ и $\frac{11}{27}$; б) $\frac{31}{32}$ и $\frac{21}{22}$; в) $\frac{45}{98}$ и $\frac{23}{38}$; г) $\frac{22}{21}$ и $\frac{21}{20}$.

- 4 а) Петя и Коля, сравнивая длины своих шагов, заметили, что 17 шагов Пети составили 8 м, а 20 шагов Коли составили 11 м. Чей шаг короче?

б) Петя распечатал на своём принтере 14 страниц за 3 мин, а Коля на своём — 24 страницы за 5 мин. Чей принтер работает быстрее?

- 5 Какие из следующих дробей можно представить в виде десятичных: $\frac{3}{40}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{16}{24}$; $\frac{9}{45}$; $\frac{14}{50}$; $\frac{34}{16}$?

- 6 Сравните числа:

а) 0,8 и $\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{5}$ и 0,9; в) 0,25 и $\frac{4}{15}$; г) $\frac{7}{11}$ и 0,6.

- 7 Даны дроби: $\frac{12}{25}$; $\frac{21}{40}$; 0,52; 0,485.

Какая из данных дробей наименьшая? Какая наибольшая?

- 8 Сравните числа, используя калькулятор:

а) 0,52 и $\frac{17}{32}$; б) $\frac{39}{125}$ и 0,3125; в) $\frac{130}{311}$ и $\frac{88}{217}$; г) $\frac{11}{170}$ и $\frac{15}{231}$.

- 9 Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\frac{3}{4}$; $\frac{37}{500}$; 0,7; б) 0,13; $\frac{29}{200}$; 0,125.

- 10 Расположите в порядке убывания числа:

а) $\frac{1}{3}$; 0,3; 0,33; $\frac{4}{11}$; б) $\frac{2}{3}$; 0,6; 0,66; $\frac{5}{8}$.

11 Сравните числа:

а) $-\frac{5}{19}$ и $-\frac{2}{9}$; б) $-\frac{5}{12}$ и $-\frac{11}{19}$; в) $-0,6$ и $-\frac{5}{6}$; г) $-\frac{1}{4}$ и $-0,2$.

12 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ По итогам работы за неделю отдел контроля телевизионного завода составил таблицу проверки качества телевизоров, выпущенных с конвейера:

День недели	Выпущено	Признано годными
Понедельник	235	228
Вторник	245	239
Среда	255	252
Четверг	256	250
Пятница	240	233
Суббота	182	175

В какой день недели завод работал лучше всего, в какой — хуже всего с точки зрения качества выпущенных телевизоров? (Воспользуйтесь калькулятором.)

13 1) Чему равно значение дроби $\frac{1}{a}$, если $a = 15; 8; \frac{1}{4}; \frac{2}{3}; -8; -\frac{3}{5}$?
2) Из данных значений a назовите какое-нибудь одно, при котором:

$$0 < \frac{1}{a} < 1; \frac{1}{a} > 1; -1 < \frac{1}{a} < 0; \frac{1}{a} < -1.$$

14 Среди чисел 6, 8, 10 и 14 выберите такое, при котором выполняется неравенство $\frac{4}{5} < \frac{7}{a} < 1$.

Б

15 Составьте все дроби (не равные 1) с числителями и знаменателями 11, 12, 13 и расположите их в порядке возрастания.

16 Сколько можно составить различных дробей, отличных от 1, у которых числитель и знаменатель являются простыми числами от 11 до 37? Укажите наименьшее и наибольшее из этих чисел. Определите, сколько из составленных дробей меньше $\frac{1}{2}$.

17 При каких натуральных значениях x верно неравенство:

а) $\frac{100}{x} > 20$; б) $\frac{30}{x} < 10$; в) $1 < \frac{50}{x} < 10$; г) $\frac{20}{x} > \frac{1}{2}$?

18 ■ **ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО** ■ Известно, что верны утверждения:

- 1) Если знаменатель несократимой дроби не имеет простых делителей, отличных от 2 и 5, то эту дробь можно записать в виде десятичной.
- 2) Если несократимую дробь можно записать в виде десятичной, то её знаменатель в качестве простых делителей имеет только 2 и 5.
- 3) Если знаменатель несократимой дроби имеет простые делители, отличные от 2 и 5, то эту дробь нельзя записать в виде десятичной.
- 4) Если несократимую дробь нельзя представить в виде десятичной, то её знаменатель содержит простые делители, отличные от 2 и 5.

Какие из утверждений останутся верными, если убрать слово «несократимая»?

1.2 Вычисления с рациональными числами

- 1** Если среди чисел, с которыми требуется выполнить арифметические действия, есть и обыкновенные, и десятичные дроби, то их надо привести к какой-нибудь одной из этих форм. При этом всегда полезно подумать, с какими дробями удобнее иметь дело. Правда, в некоторых случаях выбирать не приходится, поскольку обыкновенную дробь преобразовать в десятичную можно не всегда.

Пример 1. Найдём сумму $0,3 + \frac{1}{6}$.

Дробь $\frac{1}{6}$ нельзя обратить в десятичную, поэтому следует записать в виде обыкновенной дроби число 0,3:

$$0,3 + \frac{1}{6} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9+5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

- 2** Если выражение содержит деление на десятичную дробь, то лучше перейти к обыкновенным дробям, так как деление уголком может оказаться бесконечным.

Пример 2. Найдём значение выражения $0,32 \cdot 2,1 : 1,44$.

Заменим в данном выражении знак деления дробной чертой и преобразуем полученную дробь с помощью основного свойства дроби так, чтобы в числителе и в знаменателе оказались целые числа:

$$0,32 \cdot 2,1 : 1,44 = \frac{0,32 \cdot 2,1}{1,44} = \frac{0,32 \cdot 2,1 \cdot 1000}{1,44 \cdot 1000} = \frac{32 \cdot 21}{144 \cdot 10} = \frac{7}{15}.$$

- 3** Пример 3. Найдём значение выражения $\frac{ab}{a-b}$ при $a = 3$ и $b = -7$.

Подставим в выражение $\frac{ab}{a-b}$ значения $a = 3$ и $b = -7$ и выполним вычисления. Для этого воспользуемся правилами действий с положительными и отрицательными числами:

$$\frac{ab}{a-b} = \frac{3 \cdot (-7)}{3 - (-7)} = \frac{-21}{10} = -2,1.$$

Таким образом, значение выражения $\frac{ab}{a-b}$ при $a = 3$, $b = -7$ равно $-2,1$.

Обратите внимание на то, как была выполнена числовая подстановка:

- все содержащиеся в выражении буквы заменили числами;
- одинаковые буквы заменили одним и тем же числом;
- при замене буквы отрицательным числом это число заключили в скобки;
- в получившемся числовом выражении в числителе был поставлен знак умножения (между буквами, как вы знаете, знак умножения не ставится).

Заметим, что вычислить значение выражения $\frac{ab}{a-b}$ можно не всегда. Например, если бы мы взяли $a = b = 3$, то нам бы не удалось это сделать. В самом деле, при таких значениях a и b пришлось бы делить на 0, а значит, в этом случае выражение *не имело бы смысла*. Легко понять, что *допустимыми значениями букв a и b для выражения $\frac{ab}{a-b}$ являются любые пары чисел, при которых $a - b \neq 0$, т. е. когда $a \neq b$.*

- Объясните, как выполнить вычитание $0,7 - \frac{5}{12}$ (фрагмент 1).
- Разберите пример 2. Пользуясь им как образцом, найдите значение выражения $0,2 \cdot 0,35 : 0,49$.
- Разберите пример 3. Перечислите условия, которым отвечает выполненная в ходе решения числовая подстановка. Найдите значение выражения $\frac{m-n}{mn}$ при $m = 1,5$, $n = -3$; комментируйте каждый шаг.

А

19 Выполните действия:

- а) $3,72 + \frac{2}{5}$; в) $0,6 - \frac{4}{9}$; д) $-2,9 + \left(-\frac{1}{4}\right)$; ж) $-\frac{3}{7} + 0,5$;
 б) $\frac{1}{3} + 0,3$; г) $\frac{3}{5} - 0,76$; е) $-\frac{1}{6} - 0,5$; з) $\frac{3}{20} - 0,95$.

20 Вычислите:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } -7 \cdot 1,25 + 10; & \text{б) } -5 \cdot (-3,6) - 3,8; & \text{в) } 1,8 - 4 \cdot (-2,15); \\ -7 \cdot (1,25 + 10); & -5 \cdot (-3,6 - 3,8); & (1,8 - 4) \cdot (-2,15). \end{array}$$

21 Запишите выражение, используя в качестве знака деления дробную черту, и найдите его значение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 0,3 \cdot 1,6 : 0,84; & \text{г) } 0,15 \cdot 2,4 : 1,08; \\ \text{б) } 6,3 : (3,5 \cdot 2,7); & \text{д) } 0,48 : (0,044 \cdot 6); \\ \text{в) } 0,05 : 8,1 \cdot 45; & \text{е) } (8 \cdot 0,39) : (5,2 \cdot 9). \end{array}$$

22 Вычислите:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } \frac{0,02 \cdot 21}{2,8 \cdot 0,3}; & \text{б) } \frac{0,6 \cdot 2}{0,4 \cdot 0,9}; & \text{в) } \frac{4,2 \cdot 0,016}{0,4 \cdot 2,8}; & \text{г) } \frac{0,15 \cdot 0,8 \cdot 0,75}{12,5 \cdot 0,36}. \end{array}$$

23 Выполните умножение или деление:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } 0,12 \cdot \frac{1}{15}; & \text{в) } 1\frac{1}{6} : 1,4; & \text{д) } -1,44 \cdot \frac{5}{12}; & \text{ж) } -2,2 : \left(-1\frac{1}{3}\right); \\ \text{б) } \frac{5}{36} \cdot 0,8; & \text{г) } 4,8 : \frac{6}{7}; & \text{е) } 0,28 : \left(-\frac{14}{17}\right); & \text{з) } 1\frac{1}{15} \cdot (-0,5). \end{array}$$

24 Вычислите устно:

$$\text{а) } 2,88 \cdot 0,5; \quad \text{б) } 0,25 \cdot 16,64; \quad \text{в) } 64 \cdot 0,125; \quad \text{г) } 0,5 \cdot 0,098.$$

Образец. $0,84 \cdot 0,25 = 0,84 \cdot \frac{1}{4} = 0,84 : 4 = 0,21.$

25 Пусть $a = -5$, $b = 7$, $c = -2$. Подставьте вместо букв заданные числа и найдите значение выражения:

$$\text{а) } \frac{c}{a+b}; \quad \text{б) } \frac{a}{bc}; \quad \text{в) } \frac{ab}{c}; \quad \text{г) } \frac{a}{b-c}.$$

26 Пусть $x = -\frac{1}{3}$ и $y = 0,5$. Найдите значение каждого из выражений:
 $-(x + y); -(x - y); -(-x + y); -(-x - y).$ **27** Найдите значение выражения:

$$\text{а) } (a + c)(a - c) \text{ при } a = 0,2, c = -0,6;$$

$$\text{б) } \frac{a+c}{a-c} \text{ при } a = 2,5, c = -1;$$

$$\text{в) } ac(a - c) \text{ при } a = -2,4, c = 0,1;$$

$$\text{г) } \frac{a-c}{ac} \text{ при } a = -4,5, c = -3.$$

28 1) Найдите значение выражения при $m = 2$, $n = -\frac{2}{3}$:

$$\text{а) } \frac{m-n}{m}; \quad \text{б) } \frac{m+n}{n}; \quad \text{в) } \frac{m}{m+n}; \quad \text{г) } \frac{n}{m-n}.$$

2) Для выражения $\frac{m}{m-n}$ назовите несколько пар значений m и n , для которых выражение не имеет смысла.

29 ■ **ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО** ■ На координатной прямой отмечены числа a и b (рис. 1.1). Какое из двух утверждений верно?

1) $a + b > 0$ или $a + b < 0$ 3) $ab > 0$ или $ab < 0$

2) $a - b > 0$ или $a - b < 0$ 4) $\frac{b}{a} > 1$ или $\frac{b}{a} < 1$



■ Рис. 1.1

Б

30 Найдите значение выражения $\frac{a(b-c)}{a-c} + \frac{b(c-a)}{b-a} + \frac{c(a-b)}{c-b}$ при:

а) $a = -3, b = 2, c = -0,5$; б) $a = -0,5, b = 1, c = -2$.

31 Убедитесь, что при данных значениях x, y, z значение выражения $\frac{x-y}{z-y} + \frac{x-z}{y-z}$ равно 1:

- а) $x = 12, y = 4, z = -5$;
 б) $x = -2,5, y = 2,5, z = 3$;
 в) $x = 105, y = 20,5, z = -65$.

■ **ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО (32–33)** ■

32 На координатной прямой отмечены числа a, b и c (рис. 1.2). Какое из утверждений неверно?

1) $a + c > 0$ 2) $a - b < 0$ 3) $a + b > 0$ 4) $abc < 0$



■ Рис. 1.2

33 На координатной прямой отмечены числа a, b и c (рис. 1.3). Какое из двух утверждений верно?

- 1) $ab < b$ или $ab > b$
 2) $abc < a$ или $abc > a$
 3) $-ac < c$ или $-ac > c$



■ Рис. 1.3

1.3 Степень с натуральным показателем

1 Вы знаете, что произведение одинаковых множителей записывают короче — в виде **степени**:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n.$$

n множителей

Число a называют **основанием степени**, а число n — **показателем степени**.

Таким образом, выражение a^n означает произведение n множителей, равных a . Например: $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$; $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$. Однако такой смысл этому выражению придаётся при $n \neq 1$ (ведь произведений из одного множителя не бывает). А чтобы выражение имело смысл при любом натуральном n , для случая $n = 1$ принимают специальное соглашение. Считают, что *первая степень любого числа равна самому числу*: $a^1 = a$.

Вычислить степень числа, или, как говорят, возвести число в степень, можно путём последовательного умножения. Так, чтобы найти 2^5 , нужно четыре раза выполнить умножение на 2:

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4, \quad 2^3 = 4 \cdot 2 = 8, \quad 2^4 = 8 \cdot 2 = 16, \quad 2^5 = 16 \cdot 2 = 32.$$

В то же время процесс возведения в степень можно сократить, если множители в произведении сгруппировать так, чтобы можно было использовать уже известные результаты. Например:

$$2^8 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^3 \cdot 2^5 = 8 \cdot 32 = 256.$$

Обратите внимание: степени числа 2 с увеличением показателя возрастают очень быстро. В самом деле,

$$2^{10} = 2^8 \cdot 2^2 = 256 \cdot 4 = 1024,$$

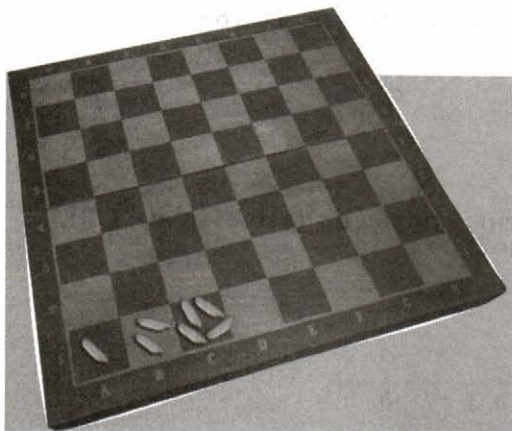
$$2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} = 1\,048\,576,$$

$$2^{30} = 2^{20} \cdot 2^{10} = 1\,073\,741\,824.$$

Таким же свойством обладает любая степень с основанием, большим 1.

Эта особенность степени положена в основу древней индийской легенды.

Рассказывают, что изобретатель шахмат за своё изобретение попросил у раджи немного зёрен пшеницы: на первую клетку доски он попросил по-



ложить 1 зерно, на вторую — в 2 раза больше, т. е. 2 зерна, на третью — ещё в 2 раза больше, т. е. 4 зерна, и т. д. до 64-й клетки. Его просьба показалась радже слишком скромной, однако вскоре выяснилось, что выполнить её невозможно.

Число зёрен, которое потребовал в награду изобретатель шахмат, выражается суммой

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}.$$

Эта сумма равна огромному числу 18 446 744 073 709 551 615, и она столь велика, что этим количеством зерна можно было бы покрыть слоем в 1 см всю поверхность нашей планеты, включая Мировой океан.

- 2** Основание степени может быть любым числом — положительным, отрицательным, нулём. При возведении в степень отрицательного числа в результате может получиться как положительное число, так и отрицательное. Это зависит от того, чётным или нечётным числом является показатель степени.

Например:

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} = 16, \text{ т. е. } (-2)^4 > 0;$$

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} \cdot (-2) = -32, \text{ т. е. } (-2)^5 < 0.$$

Вообще полезно помнить, что *степень с отрицательным основанием положительна, если показатель степени чётный, и отрицательна, если показатель степени нечётный.*

- 3** Использование степеней делает выражение более компактным, «обозримым». Особенно часто степени употребляются при записи физических величин, которые, как известно, могут быть очень большими и очень маленькими. Их записывают с помощью степени с основанием 10.

В справочниках можно увидеть, что, например, масса Земли равна $5,978 \cdot 10^{24}$ кг, а масса атома водорода — $1,674 \cdot 10^{-24}$ г. Понятно, что 10^{24} — это произведение 24 множителей, равных 10, т. е. масса Земли (в килограммах) равна

$$5\,978\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000.$$

А что означает выражение 10^{-24} ? В математике это выражение тоже считается степенью, но смысл у него иной, чем у степени с натуральным показателем.

Если масса Земли выражается очень большим числом, то масса атома водорода очень мала. И нетрудно догадаться, что если в пер-

вом случае имеется в виду умножение на 10^{24} , то во втором — деление на 10^{24} :

$$1,674 \cdot 10^{-24} = \frac{1,674}{10^{24}}.$$

Иными словами, выражение 10^{-24} считают равным $\frac{1}{10^{24}}$.

- Как называют выражение a^n , число a в этом выражении, число n ? Что означает выражение a^n , если n — натуральное число, не равное 1? если $n = 1$? Найдите значения выражений 6^3 ; $(-3)^4$; 8^1 .
- Разберите, как найдено значение степени 2^8 во фрагменте 1. Зная, что $3^2 = 9$ и $3^3 = 27$, найдите сначала 3^5 , а затем 3^8 .
- Какое число — положительное или отрицательное — может получиться при возведении в степень отрицательного числа? От чего зависит знак степени с отрицательным основанием? Сравните с нулём число: $(-49)^{20}$; $(-100)^{11}$; $(-7)^5 \cdot (-23)^6$.
- Прочитайте предложение: «Обычно снежинка имеет 5 мм в диаметре при массе $4 \cdot 10^{-3}$ г». Выразите десятичной дробью массу снежинки.

А

РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ (34–37)

34 Запишите каждое выражение в виде произведения или степени:

- а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ и $2 + 2 + 2 + 2 + 2$;
 б) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;
 в) $a + a + a$ и $a \cdot a \cdot a$;
 г) $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{20 \text{ множителей}}$ и $\underbrace{x + x + x + \dots + x}_{20 \text{ слагаемых}}$.

35 Запишите выражение короче, используя степени:

- а) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$;
 б) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$;
 в) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_n \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_m$;
 г) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) + 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$;
 д) $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$;
 е) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_m + \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_n$.

36 Упростите:

- а) $a \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$;
 б) $3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$;

- в) $a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;
 г) $(c+d) \cdot (c+d) \cdot (c+d) \cdot (c+d)$.

37 Вычислите:

- а) 15^2 ; 20^3 ; 9^3 ; г) $(-3)^4$; $(-4)^3$; $(-2)^5$;
 б) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$; д) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$;
 в) $1,5^2$; $2,1^2$; $0,5^3$; е) $(-1,5)^2$; $(-0,2)^3$; $(-0,1)^5$.

38 Восстановите число, для которого записано разложение на простые множители:

- а) $\dots = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$; б) $\dots = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; в) $\dots = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$.

39 Разложите на простые множители число:

- а) 72; б) 96; в) 400; г) 300.

40 РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ Прочитайте в объяснительном тексте, как выполнено вычисление 2^8 .

Найдите: 5^2 , 5^3 , 5^4 , 5^5 . Пользуясь полученными результатами, вычислите: 5^7 , 5^{10} , 5^{15} , 5^{20} .

41 Число 64 можно по-разному представить в виде степени:

$$64 = 2^6 = 4^3 = 8^2.$$

Запишите разными способами в виде степени следующее число:

- а) 16; б) 81; в) 256; г) 625; д) 729; е) 1 000 000.

42 Представьте разными способами 3^8 в виде произведения:

- а) двух степеней с основанием 3;
 б) трёх степеней с основанием 3;
 в) четырёх степеней с основанием 3.

43 Запишите в виде степени:

- а) с основанием 7 произведения:

$$7^2 \cdot 7^8; \quad 7^4 \cdot 7^3 \cdot 7^{10}; \quad 7 \cdot 7^9 \cdot 7^3; \quad 7^m \cdot 7^n;$$

- б) с основанием a произведения:

$$a^5 \cdot a^6; \quad a^{12} \cdot a^2 \cdot a^5; \quad a^m \cdot a^n; \quad a^x \cdot a^y \cdot a.$$

44 Вычислите:

- а) $8 + 7^2$, $(8 + 7)^2$, $8^2 + 7^2$; в) $5 \cdot 2^4$, $(5 \cdot 2)^4$, $5^4 \cdot 2^4$;
 б) $(11 - 6)^3$, $11 - 6^3$, $11^3 - 6^3$; г) $(14 : 2)^3$, $14 : 2^3$, $14^3 : 2^3$.

45 Расставьте в выражении $30 : 5 - 10^3$ скобки всеми возможными способами и найдите значения получившихся выражений.

46 Вычислите:

- а) $5 \cdot (-3)^3 + 7$; г) $-20 - 10 \cdot (-0,1)^2$;
 б) $-2 \cdot (-1,1)^2 - 15$; д) $7 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 - 8$;
 в) $10 - 7 \cdot (-2)^7$; е) $-10 \cdot (-0,3)^2 - 5 \cdot (-0,3) + 1$.

47 ■ АНАЛИЗИРУЕМ ■ Заполните таблицу:

a	0	1	-1	10	-10	0,1	-0,1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
a^2									
a^3									
a^4									

Найдите в таблице значения a , при которых выполняется условие: $a = a^2$; $a = a^3$; $a^2 = a^3$; $a^4 > a^2$; $a < a^2$; $a^3 < a$.

48 Не выполняя вычислений, определите знак результата:

- а) $(-8)^7$; в) $(-10)^{30} \cdot (-1)^{15}$; д) $(-6)^{17} \cdot (-7)^{16}$;
 б) $(-1)^{24}$; г) $(-2)^9 \cdot (-5)^{11}$; е) $(-1)^5 \cdot (-2)^{10} \cdot (-3)^{15}$.

49 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Какое из неравенств верно?

- 1) $\frac{(-5)^{12}}{(-6)^{15}} > 0$ 2) $\frac{(-4)^7}{(-10)^9} < 0$ 3) $\frac{(-1)^{20}}{(-8)^{14}} > 0$ 4) $\frac{(-2)^5}{(-3)^{10}} > 0$

50 Зная, что $28^2 = 784$, найдите значение каждого из выражений: $(-28)^2$; -28^2 ; $-(-28)^2$; $-(-(-28)^2)$; $-(-(-28))^2$.

51 Запишите выражение и найдите его значение:

- а) сумма квадратов чисел -3 и 4; квадрат суммы чисел -3 и 4;
 б) квадрат разности чисел 0,3 и 1,3; разность квадратов чисел 0,3 и 1,3;
 в) разность кубов чисел 2 и 3; куб разности чисел 2 и 3;
 г) куб суммы чисел 0,3 и -0,1; сумма кубов чисел 0,3 и -0,1.

52 Найдите значения выражений $9a^2$, $(9a)^2$, $-9a^2$, $(-9a)^2$:

- а) при $a = \frac{1}{6}$; б) при $a = -0,1$.

53 а) Объём пирамиды, в основании которой квадрат (рис. 1.4),

вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}a^2h$. Найдите объём пирамиды,

если $a = 10$ см, $h = 16$ см. (Ответ округлите до единиц.)

б) Объём цилиндра, диаметр основания которого равен его высоте (рис. 1.5), можно приближённо вычислить по формуле

$V \approx \frac{3d^3}{4}$. Найдите объём цилиндра при $d = 1,2$ м. (Ответ округлите до десятых.)

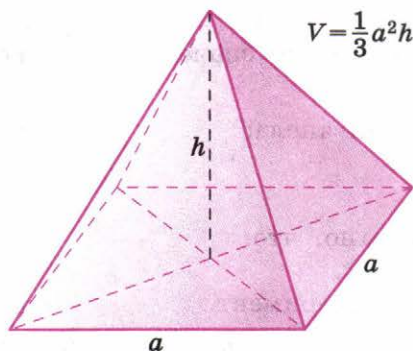


Рис. 1.4

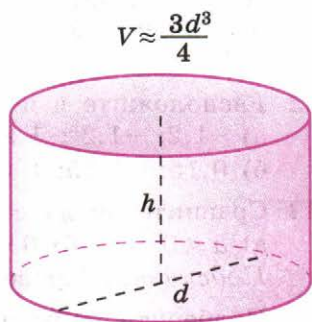


Рис. 1.5

- 54** Представьте в виде степени с основанием 10 следующие числа:
 а) 10; 100; 1000; 10 000; 100 000; 1 000 000;
 б) 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; 0,000001.
- 55** Запишите в виде суммы разрядных слагаемых число:
 а) 213 475; б) 3 552 312; в) 24 015; г) 345 700.
 Образец. $38\,232 = 3 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2$.
- 56** Используя степени числа 10, запишите, сколько в 1 км метров; сантиметров; миллиметров.
- 57** Используя степени числа 10, выразите в метрах 1 см; 1 мм; 1 мк (1 мк — один микрон, тысячная доля миллиметра).
- 58** Скорость света равна 300 000 км/с.
 1) Запишите эту величину с помощью степени числа 10.
 2) Выразите скорость света в метрах в секунду и запишите результат с помощью степени числа 10.
- 59** Запишите величину, указанную в предложении, с помощью натурального числа или десятичной дроби:
 а) расстояние от Земли до Плутона — самой далёкой известной планеты Солнечной системы — равно $7,527 \cdot 10^9$ км;
 б) расстояние от Земли до звезды Сириус равно $8,19 \cdot 10^{13}$ км;
 в) радиус молекулы воды равен $1,4 \cdot 10^{-7}$ мм;
 г) диаметр атома водорода равен $9,2 \cdot 10^{-8}$ мм.

Б**АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (60–65)**

- 60** Из выражений $(3,4 - 2,8)^3$, $-(2,8 - 3,4)^3$, $-(3,4 - 2,8)^3$ выберите те, значения которых противоположны значению выражения $(2,8 - 3,4)^3$; равны ему.

- 61** Из выражений $-(23 - 1,7)^2$, $-(1,7 - 23)^2$, $(1,7 - 23)^2$, $-(23 + 1,7)^2$ выберите такое, значение которого равно значению выражения $(23 - 1,7)^2$.
- 62** Расположите в порядке возрастания числа:
 а) $-1,2$; $-1,2^2$; $1,2$; $(-1,2)^2$;
 б) $0,15$; $-0,15$; $(-0,15)^2$; $(-0,15)^3$.
- 63** Сравните числа a и a^2 , если известно, что:
 а) $a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a > 1$.
Подсказка. Проведите числовой эксперимент.
- 64** Подберите наименьшее натуральное число n , такое, при котором выполняется неравенство:
 $2^n > 10$; $2^n > 10^2$; $2^n > 10^3$; $2^n > 10^4$; $2^n > 10^5$; $2^n > 10^6$.
 (При необходимости воспользуйтесь калькулятором.)
- 65** При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство:
 $0,1^n < 0,01$; $0,1^n < 0,0001$; $0,1^n < 0,0000001$; $0,1^n < 0, \underbrace{0 \dots 01}_{50 \text{ цифр}}$?

- 66** **ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ** Иван решил накопить деньги для покупки подарков к Новому году. У него есть 100 рублей и две возможности увеличивать эту сумму: или еженедельно добавлять к ней 100 рублей, или еженедельно увеличивать её в 1,4 раза. Продолжите заполнение таблицы, в которой приводятся расчёты накопленной суммы при первом и втором способах накопления. (При необходимости используйте калькулятор.)

Количество недель	Накопленная сумма (в рублях)	
	I способ	II способ
1	$100 + 100 = 200$	$100 \cdot 1,4 = 140$
2	$100 + 2 \cdot 100 = 300$	$(100 \cdot 1,4) \cdot 1,4 = 100 \cdot 1,4^2 = 196$
3	$100 + 3 \cdot 100 = \dots$	$100 \cdot 1,4^3 = \dots$
4		
5		
6		
...		
...		

Какой из этих способов выгоднее, если Иван планирует копить деньги в течение 4 недель? 6 недель? Какую сумму он мог бы накопить за полгода в первом и во втором случаях? (Считайте, что в месяце четыре недели.)

- 67** Лист бумаги 6 раз перегнули пополам. Чему будет равна толщина сложения, если толщина листа бумаги 0,1 мм? Запишите ответ, используя степень числа 2, и вычислите значение получившегося выражения.

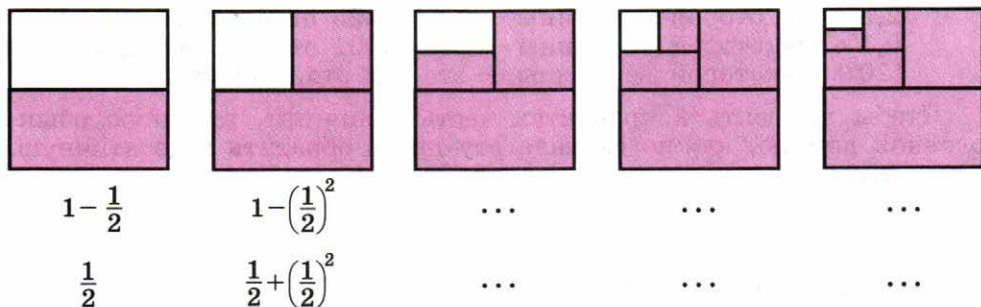
- 68** ■ **ИССЛЕДУЕМ** ■ Квадрат со стороной 1 м закрашивают по частям, как показано на рисунке 1.6. На каждом шаге закрашивается половина незакрашенной части.

1) Для первых двух квадратов записаны по два выражения для вычисления площади закрашенной части. Запишите соответствующие выражения для остальных квадратов на рисунке.

2) Запишите два разных выражения для вычисления площади закрашенной части квадрата, получившейся на десятом шаге; на сотом шаге.

3) Используйте полученный результат для вычисления значе-

ния выражения $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.



■ Рис. 1.6

1.4 Задачи на проценты

- 1** При решении задач на проценты нужно уметь свободно переходить от дробей к процентам и наоборот. Это совсем нетрудно, если помнить, что под процентом понимают $\frac{1}{100}$ часть рассматриваемой величины.

Пусть, например, известно, что 0,48 смеси лекарственных трав составляет ромашка. Выразим эту величину в процентах.

Так как $\frac{1}{100}$ часть смеси — это 1% от всей смеси, а $0,48 = \frac{48}{100}$, то ромашка составляет 48% смеси трав.

Из приведённого рассуждения понятно следующее правило:

если часть величины, заданную десятичной дробью, надо выразить в процентах, то можно в этой дроби перенести запятую на два знака вправо и к полученному числу приписать знак %.

Например:

- 0,48 некоторой величины — это 48% этой величины;
- 0,325 некоторой величины — это 32,5% этой величины;
- 0,001 некоторой величины — это 0,1% этой величины;
- 1,2 некоторой величины — это 120% этой величины.

Для обратного перехода — от процентов к десятичной дроби — запятую переносят в противоположном направлении:

если часть величины, заданную в процентах, нужно выразить десятичной дробью, то можно в числе, стоящем перед знаком %, перенести запятую на два знака влево.

Например:

- 48% некоторой величины — это 0,48 этой величины;
- 32,5% некоторой величины — это 0,325 этой величины;
- 0,1% некоторой величины — это 0,001 этой величины;
- 120% некоторой величины — это 1,2 этой величины.

Чтобы выразить в процентах часть величины, заданную обыкновенной дробью, нужно сначала эту дробь обратить в десятичную. Например:

$$\frac{3}{8} = 0,375, \text{ т. е. } \frac{3}{8} \text{ — это } 37,5\%;$$

$$\frac{1}{3} \approx 0,33, \text{ т. е. } \frac{1}{3} \text{ — это примерно } 33\%.$$

Полезно также помнить, как выражаются в процентах некоторые дроби. Примеры таких дробей приведены в таблице:

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
10%	20%	25%	50%	75%

Поскольку проценты выражаются дробями, то задачи на проценты, по существу, являются теми же задачами на дроби.

Задача 1. По данным социологического исследования, проведённого в этом году, в городе Лукошкино проживает 36 тыс. человек, 29% из них достигли пенсионного возраста, а 24% — дети и подростки дошкольного и школьного возраста. Сколько в городе взрослых жителей, не достигших пенсионного возраста?

Решение. Всё население города принимаем за 100%. Выясним, сколько процентов приходится на взрослых, не достигших пенсионного возраста:

$$100\% - (29\% + 24\%) = 47\%.$$

Далее находим 47% от 36 тыс. Так как 47% — это 0,47 населения города, то 36 000 нужно умножить на 0,47:

$$36\,000 \cdot 0,47 = 16\,920.$$

Таким образом, в городе Лукошкино живёт примерно 17 тыс. взрослых, не достигших пенсионного возраста.

Задача 2. Банк предлагает своим клиентам следующие условия вклада: деньги кладутся на счёт на 31 день, по истечении которых клиент получает доход, равный 7,5% от вложенной суммы. Какую сумму нужно положить на счёт, чтобы доход составил 1500 р.?

Решение. 1500 р. составляют 7,5%, или иначе 0,075, от неизвестной суммы. И нам нужно решить знакомую задачу — найти целое по его части. Она решается делением:

$$1500 : 0,075 = 20\,000 \text{ (р.)}.$$

Итак, на счёт надо положить 20 000 р.

Задача 3. Январский тираж нового ежемесячного журнала составил 250 экземпляров. В феврале его тираж увеличился на 30%, а в марте — ещё на 120%. Каким стал тираж журнала в марте?

Решение.

Способ 1. Сначала узнаем, на сколько экземпляров вырос тираж в феврале, т. е. найдём 30% от 250:

$$30\% \text{ тиража — это } 0,3 \text{ тиража: } 250 \cdot 0,3 = 75 \text{ (экз.)}.$$

Теперь можно определить величину февральского тиража:

$$250 + 75 = 325 \text{ (экз.)}.$$

Чтобы узнать мартовский тираж журнала, нужно найти 120% от февральского тиража и прибавить полученное число к 325:

$$120\% \text{ тиража — это } 1,2 \text{ тиража: } 325 \cdot 1,2 = 390 \text{ (экз.)};$$

$$325 + 390 = 715 \text{ (экз.)}.$$

Способ 2. Январский тираж журнала примем за 100%. В феврале тираж журнала увеличился на 30% и составил $100\% + 30\% = 130\%$ январского тиража. Так как 130% соответствуют дроби 1,3, то февральский тираж больше январского в 1,3 раза. Найдём его:

$$250 \cdot 1,3 = 325 \text{ (экз.)}.$$

Теперь 100% — это февральский тираж. В марте он увеличился на 120% и составил $100\% + 120\% = 220\%$ февральского тиража. Так как 220% — это 2,2, то мартовский тираж больше февральского в 2,2 раза, т. е. он равен:

$$325 \cdot 2,2 = 715 \text{ (экз.)}.$$

- 4 Задача 4.** Во время весенней распродажи куртку, стоившую 1500 р., продавали за 900 р. На сколько процентов была снижена цена куртки на распродаже?

Решение. Сначала узнаем, на сколько рублей новая цена меньше старой:

$$1500 - 900 = 600 \text{ (р.)}.$$

Теперь выясним, сколько процентов составляет разница в 600 р. от старой цены куртки. Для этого найдём отношение 600 р. к 1500 р. и выразим его в процентах:

$$\frac{600}{1500} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Так как 0,4 — это 40%, то цена куртки на распродаже была снижена на 40%.

- Задача 5.** К 100 г 30%-ного раствора соли долили 50 г воды. Какова концентрация получившегося раствора?

Решение. Так как исходный раствор был 30%-ный, то в 100 г раствора содержится 30 г соли. После того как к раствору долили 50 г воды, его масса стала равной 150 г, а количество соли в нём не изменилось. Чтобы узнать концентрацию получившегося раствора, нужно найти отношение массы соли к массе раствора и выразить его в процентах:

$$\frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Значит, концентрация получившегося раствора 20%.

- Проверьте утверждения, воспользовавшись одним из правил, приведённых во фрагменте 1, — перехода от дроби к процентам или от процентов к дроби:

0,75 некоторой величины — это 75% этой величины;

1,5 некоторой величины — это 150% этой величины;

30% некоторой величины — это 0,3 этой величины;

0,4% некоторой величины — это 0,004 этой величины.

- Проверьте себя, обратившись к таблице во фрагменте 1, можете ли вы легко назвать обыкновенные дроби, соответствующие процентам: 10%, 20%, 25%, 50%, 75%.
- Объясните, как находят несколько процентов от величины (задача 1). Найдите 33% от 300 р.
- Объясните, как находят величину по её известным процентам (задача 2). Найдите стоимость товара, если его 7% составляют 140 р.
- Стоимость книги, цена которой 300 р., повысилась на 20%. Как найти новую стоимость книги? Предложите разные способы (задача 3).
- Расскажите, как решить задачу: «Товар, стоивший 200 р., стал продаваться за 150 р. На сколько процентов была снижена цена товара?» (задача 4).

А

- 69** а) Части городского бюджета, предназначенные для нужд города, выражаются следующими десятичными дробями: 0,04; 0,27; 0,3; 0,255; 0,0006. Выразите эти десятичные дроби в процентах.
- б) На выборах в областную администрацию пять кандидатов на одно место получили соответственно 63%, 25%, 10,5%, 0,93% и 0,57% голосов избирателей. Выразите эти проценты десятичными дробями.
- 70** На диаграмме (рис. 1.7) представлены результаты опроса «Для чего вы покупаете велосипед?». Найдите недостающие на диаграмме данные и вычислите, сколько человек дали каждый из ответов, если было опрошено 5600 человек.
- 71** В состав одного из поливитаминов входят минералы в следующих количествах: кальций и фосфор — по 4%, магний — 1,6%, железо — 0,07%, цинк — 0,06%. Сколько миллиграммов каждого минерала содержится в одной таблетке поливитамина, масса которой 250 мг?



■ Рис. 1.7



- 72** В декабре сотрудникам фирмы была выплачена премия в размере 250% ежемесячной зарплаты.
- а) Какую премию получил сотрудник, зарплата которого была 6000 р.?
 - б) Какую сумму получил в декабре сотрудник, зарплата которого 5000 р.?
- 73** а) В магазин привезли 160 упаковок консервированных овощей и фруктов. Овощные консервы составили 75% привезённого товара, причём 40% из них были в стеклянных банках. Какое количество упаковок, содержащих овощные консервы в стеклянных банках, привезли в магазин?
- б) Из 850 учащихся школы 80% занимаются в спортивных секциях, причём 5% из них — в шахматной. Сколько учащихся в шахматной секции?
- 74** а) В городе А 450 тыс. жителей. В избирательные списки внесено 76% жителей этого города. Чтобы выборы состоялись, необходимо, чтобы в голосовании приняло участие не менее 25% избирателей, внесённых в списки. Можно ли считать, что выборы в городе А состоялись, если в день выборов на избирательные участки пришли 93 тыс. избирателей?
- б) Из 550 учащихся школы в референдуме по вопросу о введении ученического совета участвовали 88% всех учащихся. На вопрос референдума 75% учащихся, принявших участие в голосовании, ответили «да». Совет будет создан, если за него высказается не менее 60% учащихся школы. Будет ли создан ученический совет в этой школе?
- 75** К 1 июля на один из факультетов университета было подано 120 заявлений.
- а) Сколько студентов может быть принято на этот факультет, если число мест составляет 75% от числа поданных заявлений?
 - б) Сколько мест на факультете, если количество заявлений составляет 75% от числа мест?
- 76** Морская вода содержит 5% соли.
- а) Сколько соли в стакане морской воды (200 г)?
 - б) Какое количество морской воды надо взять, чтобы в ней сохранилось 200 г соли?
- 77** Запишите в виде выражения:
- а) 20% от суммы в a рублей;
 - б) сумму, 20% которой составляют a рублей.
- 78** а) В октябре расход электрических ламп на предприятии составил 600 штук. В ноябре он увеличился на 5%, а в декабре — ещё на 10%. Определите расход электроламп в ноябре и декабре.
- б) В марте расход электроэнергии в школе составил 1200 кВт·ч, но в апреле он уменьшился на 35%, а в мае — ещё на 15%. Определите расход электроэнергии в мае.

- 79 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ** На весенней распродаже в магазине товар стоимостью 350 р. уценили на 40%, а через неделю — ещё на 5%. В супермаркете такой же товар уценили на 5%, а через неделю — ещё на 40%. А на ярмарке этот же товар уценили на 45%. Где выгоднее купить этот товар?

- 80** Крутизна спуска дороги — это отношение высоты подъёма дороги к её горизонтальной протяжённости, выраженное в процентах (рис. 1.8). Найдите крутизну спуска дороги, если высота подъёма равна 60 м, а горизонтальная протяжённость 1,5 км.



Рис. 1.8

- 81 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ** а) В таблице указаны цены на некоторые товары в мае и декабре.

Товар	Цена в мае	Цена в декабре
Шарф	340 р.	391 р.
Зонт	550 р.	418 р.
Велосипед	3720 р.	3255 р.

На сколько процентов повысилась или понизилась цена каждого товара в декабре по сравнению с майской ценой? На сколько процентов майская цена была выше или ниже декабрьской? (Ответ округлите до единиц.)

б) В городских новостях прозвучало сообщение: цена одного товара, пользовавшегося повышенным спросом, в течение года выросла с 18 до 28 р., т. е. почти на 30%. Верный ли вывод сделан о росте цены?

Б

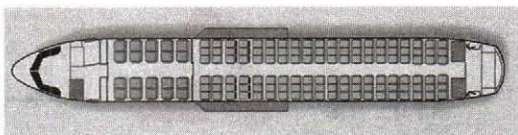
- 82** а) Представьте в виде круговой диаграммы состав лекарственного сбора: корня солодки — 27%, корня алтея — 29,8%, листьев шалфея — 14,4%, плодов аниса — 14,4%, почек сосны — 14,4%.

Образец. В расчётах для построения диаграммы используйте калькулятор. Результаты округляйте до целых. Например, чтобы выделить сектор для изображения 14,4%, надо найти 14,4% от 360° . Получим $360^\circ \cdot 0,144 = 51,84^\circ \approx 52^\circ$.

б) На книжной ярмарке за 3 дня продали все школьные учебники. В пятницу продали 300 учебников, в субботу — 420, в воскресенье — 530 учебников. Определите, какой процент от всех имевшихся на ярмарке школьных учебников составляют проданные в каждый из этих трёх дней. Используя полученные результаты, проиллюстрируйте условие задачи с помощью круговой диаграммы.

- 83** а) Летом на дачу с детским садом выехало 180 детей. Известно, что 10% детей не поехало на дачу. Сколько всего детей в детском саду?

б) Когда 78 пассажиров заняли в самолёте свои места, остались свободными 40% всех мест. Сколько пассажиров вмещает самолёт?



- 84** Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в смеси составило 2%?

- 85** ■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ ■ Имеется творог двух сортов: жирный содержит 20% жира, а нежирный содержит 5% жира. Определите процент жирности полученного творога, если смешали:

- а) 2 кг жирного и 3 кг нежирного творога;
б) 3 кг жирного и 2 кг нежирного творога.

- 86** а) В голосовании на выборах в окружную администрацию приняло участие 65% избирателей округа, 40% из них проголосовало за кандидата А. Сколько процентов избирателей данного округа отдало голоса за этого кандидата?

б) Легковые автомобили составляют 60% всего транспорта автопарка, 90% из них — автомобили, выпущенные в России, причём 50% из них — автомобили ВАЗ. Какой процент автомобилей всего автопарка составляют автомобили ВАЗ?

- 87** ■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ ■ В одной из газет автор заметки писал о скидках, к которым прибегают в магазинах перед большими праздниками. Продавцы заранее увеличивают цены на 20%, а потом делают большую праздничную скидку на 30%. По мнению автора, скидка фактически составляет всего лишь 10%. А сколько она составляет на самом деле?

- 88** а) Автомобиль прошёл 40% пути, а затем 30% оставшегося расстояния. Сколько процентов всего пути ему осталось пройти?

б) Перед поездкой бак автомобиля был заполнен на 80%. Во время поездки было истрачено 25% имевшегося запаса бензина. На сколько процентов был заполнен бензином бак к концу поездки?

89 а) В школе 16% девочек и 28% мальчиков занимаются в спортивных секциях. Сколько всего процентов школьников занимается в спортивных секциях, если число мальчиков и число девочек в школе одинаково?

б) В школьном оркестре играют 12% всех мальчиков, которые учатся в школе, и 8% всех девочек. Сколько всего процентов учащихся школы играет в оркестре, если мальчики составляют $\frac{3}{5}$ всех учащихся школы?

90 ■ МОДЕЛИРУЕМ ■ Решите задачу, используя схематические рисунки.

а) Книга дороже альбома на 25%. На сколько процентов альбом дешевле книги?

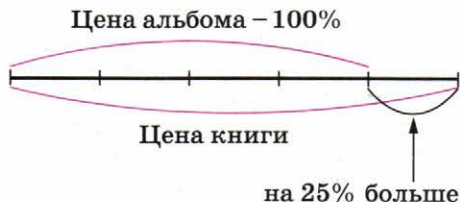
Решение. Цена альбома — 100%. Изобразим её каким-либо отрезком. Увеличим этот отрезок на 25%, т. е. на $\frac{1}{4}$ его длины; получим отрезок, соответствующий цене книги (рис. 1.9).

Теперь цена книги составляет 100% (рис. 1.10). Она изображена большим отрезком. Цена альбома меньше цены книги на $\frac{1}{5}$ этого отрезка. Так как $\frac{1}{5}$ составляет 20%, то альбом дешевле книги на 20%.

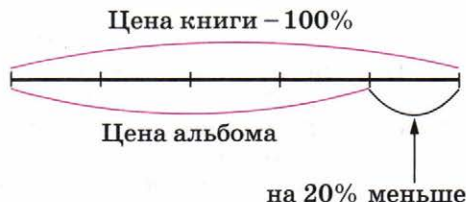
б) Блюдце на 20% дешевле тарелки. На сколько процентов тарелка дороже блюда?

в) Чашка на 20% дороже блюда. Какую часть стоимости чашки составляет стоимость блюда? На сколько процентов блюдце дешевле чашки?

г) Цена книги была повышена на 10%. В конце года вновь была установлена старая цена. На сколько процентов снизили цену книги в конце года?



■ Рис. 1.9



■ Рис. 1.10

1.5 Статистические характеристики

- 1 Ученик получил в течение четверти следующие отметки по алгебре: 5, 2, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5.

	Алгебра									
1. Аксёнов	5	2	4	5	5	4	4	5	5	5

Какую четвертную отметку поставит ему учитель? Многих школьников волнует подобная проблема, и чаще всего ученики решают её следующим естественным образом: складывают все отметки и делят сумму на их количество. В нашем случае получим

$$\frac{5+2+4+5+5+4+4+5+5+5}{10} = 4,4.$$

Число 4,4 называют **средним арифметическим** исходных чисел.

Определение

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

В этом примере среднее арифметическое можно было найти немного иначе. Двойку ученик получил только один раз, четвёрку — 3 раза, а пятёрку у него было 6. Поэтому среднее арифметическое быстрее подсчитать так:

$$\frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6}{10} = 4,4.$$

- 2 Среднее арифметическое является важной характеристикой ряда чисел, в нашем случае отметок за четверть, но иногда полезно рассматривать и другие *средние*. Например, претендуя на «5», ученик наверняка будет использовать такой аргумент: «Чаще всего в четверти я получал пятёрки!» Статистик в этом случае сказал бы иначе: **Модой** этого ряда является число 5».

Определение

Модой называют число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто.

Можно сказать, что данное число самое «модное» в этом ряду.

В отличие от среднего арифметического, которое можно вычислить для любого числового ряда, моды у ряда вообще может не быть. Например, если ученик получил по русскому языку отметки «4», «2», «3», «5», то каждая отметка встречается в этом ряду только один раз и среди них нет числа, встречающегося чаще других. Значит, у этого ряда нет моды. А среднее арифметическое, конечно, есть:

$$\frac{2+3+4+5}{4} = 3,5.$$

Такой показатель, как мода, используется не только для числовых данных. Вы уже знакомы с социологическими опросами. Если, например, опросить большую группу учеников, какой школьный предмет им нравится больше всего, то модой этого ряда ответов окажется тот предмет, который будут называть чаще остальных.

Мода — показатель, который широко используется в статистике. Одним из наиболее частых использований моды является изучение спроса. Например, при решении вопросов, в пачки какого веса фасовать масло, какие открывать авиарейсы и т. п., предварительно изучается спрос и выявляется мода — это наиболее часто встречающийся заказ.

3 Однако нахождение среднего арифметического или моды далеко не всегда позволяет делать надёжные выводы на основе статистических данных. Например, известно, что на планете Меркурий средняя температура $+15^\circ$. Исходя из этого статистического показателя можно подумать, что на Меркурии умеренный климат, удобный для жизни людей. Но на самом деле это не так. Температура на Меркурии колеблется от наименьшего значения -150° до наибольшего значения $+350^\circ$. Значит, если у нас есть ряд данных, то для обоснованных выводов и надёжных прогнозов на их основе, помимо средних значений, надо ещё указать, насколько используемые данные различаются между собой.

Одним из статистических показателей различия, или разброса, данных является **размах**.

Определение

Размах — это разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных.

Для температуры на планете Меркурий, например, размах равен $350^\circ - (-150^\circ) = 500^\circ$. Конечно, такого перепада температур человек выдержать не может.

Помимо размаха, во многих случаях важны сами наибольшие или наименьшие значения данных. Например, если для исследования того же Меркурия посылается спутник, необходимо, чтобы приборы работали и при наибольших, и при наименьших возможных температурах.

- Что называют средним арифметическим ряда чисел? Найдите среднее арифметическое ряда чисел: а) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5; б) 4, 3, 4, 3.
- Каким было бы среднее арифметическое ряда отметок учащегося (фрагмент 1), если бы в этом ряду не было двойки?
- Каков размах исходного ряда отметок из текста? Каким был бы размах ряда, если бы в нём не было двойки?
- Проведите опрос и узнайте, какой школьный предмет нравится учащимся вашего класса больше всего, определив моду полученного ряда (фрагмент 2).

А

ДЕЙСТВУЕМ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ (91–93)

91 Найдите среднее арифметическое ряда:

- а) 31; 36; 69; 24; 20; 48;
б) 1,6; 4,9; 12,4; 3,1.

92 Найдите моду ряда:

- а) 13; 15; 13; 12; 12; 12; 13; 14; 13; 15; 13;
б) 39; 54; 33; 36; 20; 29; 35; 50; 21.

93 Найдите размах ряда:

- а) 12; 25; 38; в) 293; 812; 90; 2; 373; 28;
б) 5; 17; 0; 26; 14; г) 7,2; -0,6; -4,5; 6,3; 1,1.

94 Измерив рост двенадцати солдат (в см) подразделения, получили следующие данные: 178, 169, 191, 182, 171, 173, 174, 180, 179, 164, 178, 185. Найдите средний рост солдат подразделения и число солдат выше среднего роста. (Используйте калькулятор.)

95 В отделе мужской обуви универмага в течение дня производился учёт размеров купленной обуви. Были получены следующие результаты: 44, 40, 43, 39, 42, 42, 42, 45, 41, 43, 43, 41, 42, 46, 40, 41, 42, 39, 42, 45, 42, 43, 44, 44, 41, 42. Представьте эти результаты в виде таблицы:

Размер	39	40	41	42	...
Количество пар					

Чему равна мода ряда размеров? Что характеризует этот показатель?

96 На диаграмме (рис. 1.11) представлены данные о числе болельщиков, посетивших футбольные матчи на стадионе «Динамо» в Москве за месяц. Найдите размах посещаемости и среднюю посещаемость матча, округлив её до сотен. (Используйте калькулятор.)

97 В соревнованиях в стрельбе по мишени участвовало 12 человек, каждый из которых сделал по 10 выстрелов. В таблице указано число результативных выстрелов каждого из спортсменов:

Номер участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число попаданий	8	6	7	8	8	5	6	9	8	8	5	9

Найдите среднее арифметическое, моду и размах ряда попаданий. Что характеризует каждый из этих показателей?

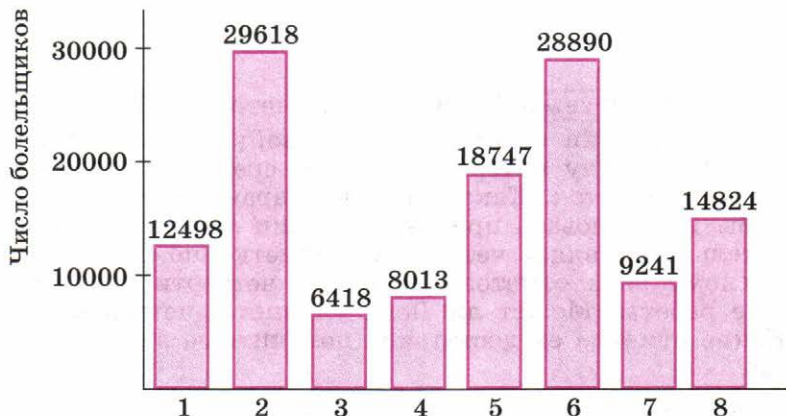


Рис. 1.11

- 98** На соревнованиях по фигурному катанию на коньках девять судей поставили спортсмену следующие оценки:

5,5; 5,4; 4,9; 5,3; 5,0; 5,3; 5,4; 5,7; 5,4.

Найдите размах и моду ряда оценок. Отбросьте наибольшую и наименьшую оценки и найдите средний балл спортсмена.

- 99** ■ **РАССУЖДАЕМ** ■ Для службы в Президентском полку отбирают призывников ростом не менее 175 см и не более 190 см.

а) Можно ли утверждать, что средний рост солдат этого полка равен 182,5 см?

б) Есть три группы призывников, про которые известно, что:

- в первой группе средний рост равен 180 см;
- во второй группе максимальный рост равен 180 см;
- в третьей группе минимальный рост равен 180 см.

В каждой ли из этих групп заведомо есть призывник, годный к службе в Президентском полку?

- 100** ■ **ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО** ■ Средняя масса волнистых попугайчиков школьного живого уголка 42 г. Масса попугайчика Кеши равна 43 г. Верны ли следующие утверждения?

а) Все попугайчики, кроме Кеши, имеют массу 42 г.

б) Масса каждого попугайчика, кроме Кеши, меньше 42 г.

в) В живом уголке есть попугайчик, масса которого меньше 42 г.

г) В живом уголке есть попугайчик, масса которого равна 41 г.

Б

- 101 ■ ЭКСПЕРИМЕНТИРУЕМ ■** 1) В течение четверти Лена получила следующие отметки по алгебре: три двойки, две тройки, четыре четвёрки и одну пятёрку. Найдите среднее арифметическое и моду ряда отметок. Какую из этих характеристик Лена предпочла бы использовать при выставлении четвертной отметки? 2) Учитель выставляет четвертную отметку по среднему арифметическому ряда отметок. До конца четверти ещё две контрольные работы. Может ли Лена улучшить четвертную отметку? Какие отметки ей достаточно получить за эти контрольные работы?

- 102** В таблице представлены результаты контрольной работы по геометрии в 7 классе:

Отметка	2	3	4	5
Число учеников	4	8	12	6

Найдите моду ряда отметок и средний результат по контрольной работе.

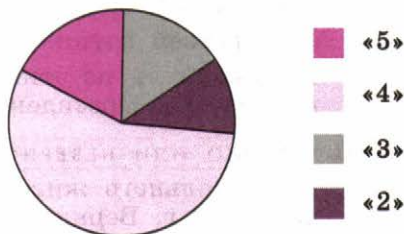
- 103** В таблице представлены данные о количестве детей в семьях города:

Число детей в семье	0	1	2	3	4	5	6
Число семей	255	320	210	80	18	6	1

Найдите среднее число детей в семье и моду (количество детей в наиболее типичной семье). (Используйте калькулятор.)

- 104 ■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ ■**

Завуч школы подвела итоги контрольной работы по алгебре в седьмых классах и представила результаты на круговой диаграмме (рис. 1.12). Найдите моду ряда отметок и средний результат по контрольной работе.



- 105** Столбчатая диаграмма, изображённая на рисунке 1.13, показывает, сколько книг прочитал каждый из ребят за летние каникулы.

■ Рис. 1.12

а) Найдите среднее арифметическое и моду этого ряда данных.
б) Оцените по этим данным, какое приблизительно количество книг прочитали за лето все ученики этой школы, если всего их 1200 человек.

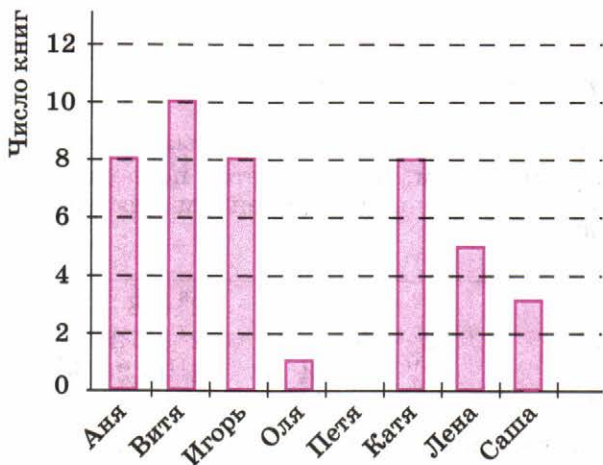


Рис. 1.13

- 106 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■** Директор фирмы решил начать борьбу с курением и провёл анализ заболеваемости своих сотрудников. Он выписал число рабочих дней, пропущенных в течение года по болезни каждым сотрудником, предварительно разбив их на две группы — курящие и некурящие. Получились такие результаты:

Курящие: 7, 5, 2, 6, 4, 4, 6, 7, 9, 7, 0, 8, 11, 8.

Некурящие: 3, 3, 6, 0, 3, 6, 2, 2, 4, 5, 13, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 6, 4.

Директор сделал по этим результатам убедительные выводы о вреде курения. Сделайте и вы то же самое.

107 ■ ИССЛЕДУЕМ ■

- 1) Вычислите среднее арифметическое ряда:

2, 8, 16, 24, 30, 40.

Используя полученный результат, попробуйте догадаться, чему равны средние арифметические следующих рядов:

а) 12, 18, 26, 34, 40, 50;

б) 20, 80, 160, 240, 300, 400.

Проверьте себя с помощью вычислений.

- 2) Как изменится среднее арифметическое ряда, если:

а) ко всем членам ряда прибавить одно и то же число;

б) все члены ряда умножить на одно и то же положительное число?

Изменяются ли при этом мода и размах?

1.6 Последняя цифра степени

(Для тех, кому интересно)

Проведём небольшое исследование: выясним, есть ли какая-нибудь закономерность в том, как меняется последняя цифра числа 2^n , где n — натуральное число, с изменением показателя n . Для этого рассмотрим таблицу:

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$
$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$	$2^{11} = 2048$	$2^{12} = 4096$

Мы видим, что через каждые четыре шага последняя цифра повторяется. Заметив это, нетрудно определить последнюю цифру степени 2^n для любого показателя n .

В самом деле, возьмём число 2^{100} . Если бы мы продолжили таблицу, то оно попало бы в столбец, где находятся степени 2^4 , 2^8 , 2^{12} , показатели которых кратны четырём. Значит, число 2^{100} , как и эти степени, оканчивается цифрой 6.

Вообще все натуральные числа могут быть отнесены к одной из четырёх групп: числа, делящиеся на 4, числа, дающие при делении на 4 остаток, равный 1, остаток, равный 2, или остаток, равный 3. И последняя цифра числа 2^n определяется тем, в какую из этих групп попадает показатель n . Так, например, число 2^{201} оканчивается цифрой 2, так как 201 при делении на 4 даёт в остатке 1, а число 2^{202} — цифрой 4, так как $202 = 4 \cdot 50 + 2$.

108 Какими цифрами могут оканчиваться числа, получающиеся при возведении в степень числа 3? Какой цифрой оканчивается число: 3^{10} ; 3^{15} ; 3^{120} ; 3^{126} ?

109 Какими цифрами могут оканчиваться степени числа 7? Какой цифрой оканчивается число: 7^{40} ; 7^{61} ; 7^{30} ; 7^{23} ?

110 Какое из чисел: 2^{100} ; 2^{101} ; 2^{102} ; 2^{103} — оканчивается той же цифрой, что и число 2^{10} ?

111 Докажите, что числа 3^{33} , 3^{333} и 3^{3333} оканчиваются одной и той же цифрой. Укажите ещё какую-нибудь степень числа 3, которая оканчивается той же цифрой.

112 Назовите какое-нибудь число, отличное от 0 и 1, любая степень которого оканчивается одной и той же цифрой. Приведите ещё примеры таких чисел.

- 113** Сформулируйте условие, при котором числа 4^m и 4^n , где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, оканчиваются одной и той же цифрой.
- 114** Делится ли на 10: сумма $11^{14} + 3^{22}$; разность $7^{20} - 9^{10}$; произведение $12^{15} \cdot 15^{12}$?

Дополнительные задания

Вычисления с рациональными числами

- 115** Вычислите:

а) $0,8 + \left(-\frac{5}{6}\right)$; г) $\frac{2}{3} - 0,8$; ж) $4,2 : \left(-\frac{6}{7}\right)$;
 б) $-\frac{1}{50} + 1,37$; д) $-\frac{2}{7} \cdot 1,4$; з) $0,16 : 2\frac{2}{5}$;
 в) $-7,11 - \frac{1}{2}$; е) $-0,24 \cdot \left(-\frac{3}{16}\right)$; и) $3\frac{1}{5} : 0,64$.

- 116** В числителе дроби запишите произведение всех натуральных чётных чисел, меньших 10, а в знаменателе — произведение всех натуральных нечётных чисел, меньших 10. Сократите полученную дробь и сравните её с $\frac{1}{3}$.

- 117** Сравните дроби:

а) $\frac{1,4 \cdot 6 \cdot 0,28}{0,24 \cdot 0,2 \cdot 21}$ и $\frac{6,9 \cdot 9,6 \cdot 0,05}{4 \cdot 0,36}$; б) $\frac{1,5 \cdot 0,084}{0,18 \cdot 3,6}$ и $\frac{0,27 \cdot 0,05}{0,062 \cdot 0,75}$.

- 118** Вычислите:

а) $\frac{2,8 : 2\frac{4}{5} \cdot 2\frac{2}{3}}{1,6 : 1,3}$; б) $\frac{1,8 : 1\frac{1}{5} \cdot 0,12}{0,27 : \frac{2}{7}}$.

- 119** Вычислите и запишите ответ в виде десятичной дроби:

а) $\frac{\frac{4,5}{10,5} + \frac{10,5}{4,5}}{\frac{10,5}{10,5} - \frac{10,5}{4,5}}$; б) $\frac{\frac{0,5-1}{0,5+1} + \frac{0,5+1}{0,5-1}}{\frac{0,5-1}{0,5+1} - \frac{0,5+1}{0,5-1}}$.

- 120** Найдите значение выражения:

а) $\frac{70,2 \cdot 0,5}{9 \cdot 1\frac{1}{2}} - \frac{2,4 \cdot 10,8}{4 \cdot 1\frac{4}{5}} - \frac{1,4 \cdot 16,2}{3 \cdot 1\frac{1}{5}}$; б) $\frac{\frac{8}{15} \cdot 1\frac{9}{16}}{1,5} + \frac{1\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5}}{1,6} + \frac{2\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16}}{1,8}$.

- 121** Вычислите значение выражения при $a = 1,5$, $b = 0,7$, $c = -0,5$:

а) $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}$; б) $\frac{(b-a)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

- 122** Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

а) $\frac{(x+y)^2}{x-y}$ при $x = -7$, $y = 3$; при $x = 9$, $y = 11$;

б) $\frac{a^3 - b^3}{ab}$ при $a = 5$, $b = -1$; при $a = -2$, $b = 3$.

- 123** Сравните значения выражений:

а) $-\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^3$ и $-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^3$;

б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}$ и $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}$.

- 124** Расположите в порядке возрастания числа:

а) $-0,11$, $(-0,11)^2$, $(-0,11)^3$, $(-0,11)^4$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$, $\left(-\frac{1}{5}\right)^{30}$, $-\left(\frac{1}{7}\right)^{30}$.

Задачи на проценты

- 125** Изюм, получаемый при сушке винограда, составляет 32% его массы.

а) Сколько изюма получится из 5 кг винограда?

б) Из какого количества винограда получится 2 кг изюма?

- 126** а) Банк выплачивает владельцу денежного вклада 8% годовых. Какую сумму надо положить в банк, чтобы по истечении года получить доход в 1000 р.?

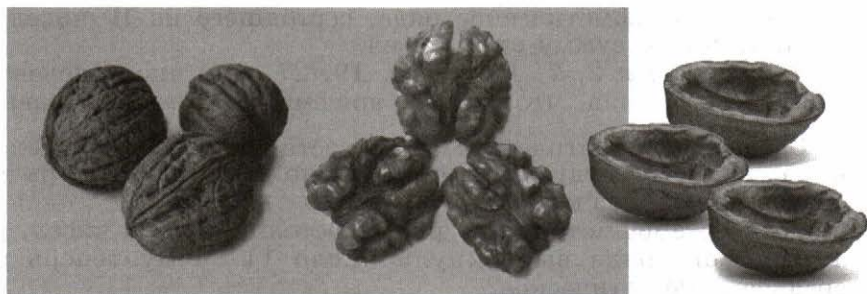
б) Магазин предлагает за 2000 р. дисконтную карту на год, которая даёт право на 10% скидки при покупке товаров в этом магазине. На какую минимальную сумму необходимо приобрести товаров за этот год, чтобы покупка дисконтной карты оправдалась?

- 127** Среди участников кросса 35% — студенты, остальные — старшеклассники, причём их на 252 человека больше, чем студентов. Сколько спортсменов участвует в кроссе?

- 128** После повышения цены на 30% книга стала стоить 182 р. Сколько стоила книга до повышения цены?

- 129** Школьная баскетбольная команда из 16 игр, сыгранных на соревнованиях за год, выиграла 12. В следующем году она планирует сыграть на соревнованиях 22 игры. Сколько игр ей надо выиграть, чтобы её результат в процентном отношении оказался по крайней мере не хуже?

- 130** При очистке орехов 60% уходит в отходы. Как вы думаете, что выгоднее — купить неочищенные орехи по цене 100 р. за килограмм или очищенные орехи по цене 250 р. за килограмм?



- 131** Сколько килограммов сливочного масла можно получить из 1000 кг молока жирностью 4,5%, если содержание жира в масле составляет в среднем 75%?
- 132** За час до киносеанса оставались непроданными 30% всех билетов. Но через полчаса к кинотеатру подъехала группа туристов и купила 45 билетов, что составило 20% билетов, оставшихся в кассе. Сколько всего мест в кинотеатре?
- 133** Собранный урожай яблок распределили следующим образом: 75% всех яблок засушили, 40% остатка пошло на варенье, а из оставшихся 3 кг яблок сварили компот. Сколько всего собрали яблок?
- 134** Бюджетные деньги, выделенные на школы двух районов, распределили между этими районами в отношении 3 : 5. Сколько процентов бюджетных денег досталось каждому району?
- 135** В пансионате имеются однокомнатные и двухкомнатные номера в отношении 5 : 3. Для отдыха с маленькими детьми оборудовано 16% однокомнатных и 4% двухкомнатных номеров. Сколько всего процентов номеров оборудовано для отдыхающих с маленькими детьми?

● Среднее арифметическое

- 136** Все числа ряда равны между собой. Чему равно их среднее арифметическое?

■ ЭКСПЕРИМЕНТИРУЕМ (137–138) ■

- 137** Придумайте три разных числа, таких, чтобы их среднее арифметическое совпадало со вторым по величине числом. Может ли среднее арифметическое совпадать с наибольшим из трёх чисел? с наименьшим?

- 138** Придумайте четыре разных числа, таких, чтобы их среднее арифметическое совпадало:
 а) со вторым по величине числом;
 б) с третьим по величине числом.
- 139** а) Среднее арифметическое ряда, состоящего из 10 чисел, равно 4. Найдите сумму этих чисел.
 б) В ряду чисел 2, 7, 10, x , 18, 19, 27 одно число неизвестно. Найдите его, зная, что среднее арифметическое ряда равно 14.
- 140** а) Среднее арифметическое ряда, состоящего из 10 чисел, равно 5. К этому ряду приписали число 16. Чему теперь равно среднее арифметическое?
 б) Среднее арифметическое ряда, состоящего из 8 чисел, равно 4. Из этого ряда вычеркнули число 11. Чему теперь равно среднее арифметическое?
- 141** Среднее арифметическое некоторых восьми чисел равно 15, а среднее арифметическое других двенадцати чисел равно 14. Найдите среднее арифметическое всех этих чисел.

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Сформулируйте перекрёстное правило сравнения дробей. Проиллюстрируйте его на примере дробей $\frac{20}{33}$ и $\frac{9}{22}$. Как ещё можно сравнить эти дроби?
- 2 Дано выражение $\frac{a-c}{ac}$. Запишите числовое выражение, которое получится в результате подстановки $a = -7$, $c = -10$. Прокомментируйте свои действия.
- 3 Что означает выражение a^n , где n — натуральное число? (Рассмотрите случаи $n \neq 1$ и $n = 1$.) Как называют выражение a^n ? число a ? число n ?
- 4 Какой знак может иметь степень с отрицательным основанием? Приведите примеры.
- 5 Что означает запись 10^{-5} ? Запишите с отрицательным показателем степени выражение $\frac{7}{10^{11}}$.
- 6 Какие статистические характеристики вы знаете? Что называется средним арифметическим нескольких чисел? Приведите пример ситуации, в которой вычисляется среднее арифметическое.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- 1 Сравните числа: а) $\frac{8}{17}$ и $\frac{11}{21}$; б) 0,6 и $\frac{4}{7}$; в) $\frac{6}{25}$ и 0,219.
- 2 Расположите в порядке возрастания числа: 0,4; $\frac{3}{8}$ и $\frac{2}{3}$.
- 3 В результате реконструкции на одном комбинате производство бумаги увеличилось с 10 до 12 т в месяц, а на другом – с 12 до 14 т в месяц. На каком комбинате произведена более эффективная реконструкция?
- 4 Выполните действия:
а) $\frac{3}{4} + 0,123$; б) $0,3 - \frac{1}{6}$; в) $0,15 \cdot \frac{3}{5}$; г) $\frac{6}{25} : 0,12$.
- 5 Вычислите: а) $\frac{0,7 \cdot 0,02}{0,21}$; б) $7,5 : 1,25 \cdot 0,015$.
- 6 Найдите значение выражения:
а) $\frac{x+y}{z}$ при $x = 0,75$, $y = -2,25$, $z = -0,6$;
б) $\frac{a-x}{ax}$ при $a = 1,2$, $x = -0,3$.
- 7 Найдите значение степени:
а) $(-2)^5$; б) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$; в) $(-0,1)^6$.
- 8 Вычислите:
а) $-5 \cdot 3^3$; б) $1 - 5 \cdot 0,4^2$;
в) $0,01 \cdot (-3)^4$; г) $10 \cdot (0,7 - 1,2)^3$.
- 9 Объём треугольной призмы, в основании которой равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 1.14), вычисляется по формуле $V = \frac{a^2 h}{2}$. Найдите объём призмы, если $a = 8$ см, $h = 15$ см.
- 10 Выразите в процентах десятичные дроби: 0,7; 0,15; 0,06; 0,075; 0,005.
- 11 Выразите десятичной дробью: 42%, 30%, 8%, 19,3%, 0,7%.
- 12 Цена товара 1200 р. Сколько заплатит покупатель за этот товар, если он продаётся со скидкой 3,5%?

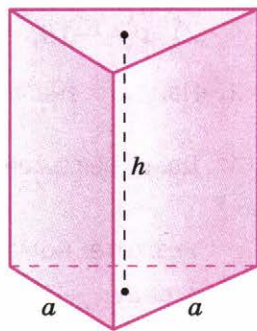
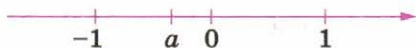


Рис. 1.14

- 13 На первый курс медицинского училища может быть зачислено 60 учащихся. Поданные заявления составили 160% от этого числа. На «отлично» все экзамены сдали 25% поступающих. Сколько человек сдали экзамены на «отлично»?
- 14 В прошлом году в школе училось 600 учащихся, а в этом году их стало 660. На сколько процентов увеличилось число учащихся школы?
- 15 Найдите среднее арифметическое, моду и размах ряда:
4, 5, 5, 7, 5, 7, 9, 12.

Проверьте себя (тест)

- 1 Какое из данных чисел наименьшее?
1) 0,44 2) 0,8 3) $\frac{2}{5}$ 4) $\frac{4}{9}$
- 2 Даны дроби $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$. Выберите из данных значений a и b такие, при которых $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
1) $a = 16, b = 15$ 3) $a = -15, b = -16$
2) $a = -16, b = -15$ 4) $a = -15, b = 16$
- 3 Найдите значение выражения $\frac{0,3 \cdot 0,25}{0,45}$.
- 4 Даны выражения: 1) $2,37 : (1,15 \cdot 0,18)$. 3) $2,37 : (1,15 : 0,18)$.
2) $(2,37 : 1,15) \cdot 0,18$. 4) $(2,37 : 1,15) : 0,18$.
Укажите номера выражений, которые могут быть преобразованы к виду $\frac{2,37}{1,15 \cdot 0,18}$.
- 5 Найдите значение выражения $\frac{(a+x)(a-x)}{ax}$ при $a = -2, x = -0,2$.
- 6 На координатной прямой отмечено число a . Какое из следующих неравенств неверно?



- 1) $\frac{1}{a} < -1$ 2) $-\frac{1}{a} > 1$ 3) $\frac{1}{a} < a$ 4) $-\frac{1}{a} < a$

- 7 Как можно записать короче выражение

$$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 7}_{10 \text{ множителей}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_{20 \text{ множителей}}$$

- 1) $7^{10} \cdot 5^{20}$ 3) $10^7 \cdot 20^5$
 2) $7^{10} + 5^{20}$ 4) $10^7 + 20^5$
- 8 Вычислите $10 \cdot (-0,3)^3$.

- 9 Расположите в порядке возрастания числа: $-1,7$; $(-1,7)^2$; $(-1,7)^3$.

- 1) $-1,7$; $(-1,7)^2$; $(-1,7)^3$ 3) $(-1,7)^3$; $-1,7$; $(-1,7)^2$
 2) $(-1,7)^3$; $(-1,7)^2$; $-1,7$ 4) $-1,7$; $(-1,7)^3$; $(-1,7)^2$

- 10 Найдите значение выражения $-((-1)^{10} - (-1)^{11})^2$.

- 1) -4 2) -2 3) 0 4) 4

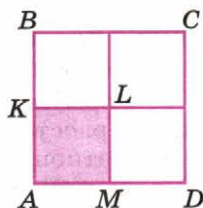
- 11 Соотнесите дроби, которые выражают доли некоторой величины, и соответствующие им проценты.

Дроби: А) $\frac{3}{5}$ Б) $\frac{3}{10}$ В) $0,07$ Г) $0,7$

Проценты: 1) 7% 2) 60% 3) 70% 4) 30%

- 12 На сколько процентов площадь квадрата $ABCD$ больше площади квадрата $AKLM$?

- 13 На сколько процентов площадь квадрата $AKLM$ меньше площади квадрата $ABCD$?



- 14 Издательство выпустило 10 наименований книг для взрослых и 40 наименований книг для детей. Сколько процентов всех книг составляют книги для взрослых?

- 1) 10% 2) 15% 3) 20% 3) 25%

- 15 Цена акции за неделю понизилась на 10% и стала равной 3 р. 60 к. Сколько стоила акция неделю назад?

- 1) 4 р. 2) 3 р. 96 к. 3) 3 р. 24 к. 4) 36 р.

- 16 Седьмой класс писал контрольную работу по геометрии. В результате выяснилось, что 14 человек решили все 3 задачи контрольной работы, 11 человек решили 2 задачи, 5 человек — 1 задачу и 3 человека не решили ни одной задачи. Определите среднее число задач, решённых одним учеником.

- 1) $1\frac{1}{3}$ 2) 2 3) $2\frac{1}{11}$ 4) 3

Прямая и обратная пропорциональность

Занимаясь математикой, вы узнали много формул, описывающих зависимости между различными величинами, и научились с их помощью вычислять значения одних величин по значениям других. С самыми разными зависимостями, выраженными формулами, вы не раз ещё встретитесь на страницах школьных учебников, в вашей повседневной жизни. Некоторые из них встречаются так часто, что их свойства математика изучает особенно внимательно. Это прежде всего прямая пропорциональность и обратная пропорциональность, с которыми вы познакомитесь в этой главе.

2.1 Зависимости и формулы

■ Вы знаете формулу площади прямоугольника $S = ab$, которая выражает соотношение между площадью S и длинами сторон a и b . Практический смысл этой формулы состоит в том, что для нахождения площади прямоугольника достаточно измерить его стороны и перемножить получившиеся числа.

Формула пути равномерного движения $s = vt$ выражает зависимость расстояния s от скорости движения v и времени t . Это главное соотношение между расстоянием, скоростью и временем движения позволяет по любым двум из указанных величин найти третью с помощью вычислений.

Каждый человек в повседневной жизни фактически пользуется формулой стоимости покупки, умножая цену товара (т. е. стоимость одного килограмма, или одной пачки, или одного метра и т. п.) на количество купленного товара (число килограммов, пачек, метров и т. п.). Если стоимость покупки обозначить буквой C , цену товара — буквой c , а количество купленного товара — буквой m , то формула стоимости покупки будет выглядеть так: $C = cm$.

Много раз вы решали задачи, в которых шла речь о выполнении некоторой работы. Пусть, например, каменщик выкладывает стену из кирпичей. Объём выполненной им работы, а именно число уложенных кирпичей, зависит от того, насколько быстро совершается эта работа, т. е. сколько кирпичей укладывает каменщик, например, за час. Эта величина, показывающая, какая работа выполняется в единицу времени, имеет специальное название — *производительность работы*. Для вычисления объёма выполненной рабо-

ты надо производительность умножить на время. Обозначим объём всей работы буквой P , производительность буквой p , а время работы буквой t . Получим формулу, связывающую эти величины: $P = pt$.

При вычислениях по формулам вместо букв можно подставлять разные числа. Например, в формуле $s = vt$ время и скорость могут меняться, и в зависимости от этого будет меняться и расстояние. Такие изменяющиеся величины называют *переменными величинами*, а буквы в формуле, которыми они обозначены, — *переменными*.

Буквой в формуле не всегда обозначена переменная. Например, в известной вам формуле длины окружности $C = \pi d$ буквой π обозначено число, равное отношению длины окружности к диаметру, являющееся одним и тем же для любой окружности. Говорят, что π — это постоянная (или константа — от латинского *constantis*, означающего «постоянная»). А в незнакомой вам пока знаменитой формуле Альберта Эйнштейна $E = mc^2$, выражающей зависимость между массой тела и энергией, которой оно обладает, буква c — это константа, равная скорости света.

2 Каждая переменная в формуле связана с множеством значений, которые она может принимать. Так, в формуле $s = vt$ переменные могут принимать только положительные значения. Более того, эти значения находятся в ограниченном промежутке. Например, если этой формулой описывается движение пешехода, то значения скорости v не могут превосходить 5—6 км/ч. А в формуле $P = pt$, выражающей зависимость объёма выполненной каменщиком работы от производительности и времени, переменные P и p могут принимать только натуральные значения.

3 При вычислениях по формулам необходимо следить за тем, чтобы единицы, в которых выражены входящие в них величины, были согласованы между собой. Только в этом случае формула может дать правильный результат. Так, если поезд движется со скоростью 108 км/ч, то за 10 с он пройдёт вовсе не $108 \cdot 10 = 1080$ км, а 0,3 км. Действительно, чтобы получить правильный результат, надо время выразить в часах:

$$10 \text{ с} = \frac{1}{360} \text{ ч}, s = 108 \text{ км/ч} \cdot \frac{1}{360} \text{ ч} = \frac{108 \text{ км} \cdot \text{ч}}{360 \text{ ч}} = 0,3 \text{ км}.$$

Обратите внимание на то, что в ходе вычислений мы обращались с единицами, в которых выражена величина, так же, как и с дробями.

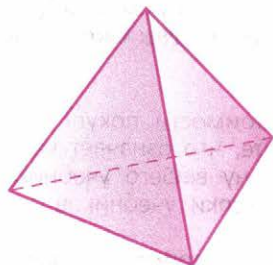
□ Запишите формулу, которая выражает зависимость стоимости покупки от цены товара и количества купленного товара. Объясните, что означает каждая переменная, если покупают учебники. Выясните цену вашего учебника алгебры и рассчитайте по этой формуле стоимость покупки учебников алгебры для вашего класса.

□ Какие значения могут принимать переменные в формуле стоимости покупки учебников, которой вы пользовались в предыдущем задании?

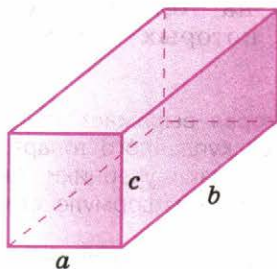
- Запишите формулу зависимости длины пройденного пути от скорости и времени движения. Вычислите по этой формуле расстояние, которое автомобиль, движущийся по шоссе со скоростью 75 км/ч, проехал за 30 с.

А

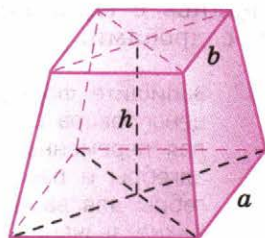
- 142** а) Тетрадь стоит x рублей, а альбом стоит y рублей. Составьте формулу для вычисления стоимости покупки S , если куплено m тетрадей и n альбомов. Какие значения могут принимать переменные m и n ?
- б) Вода в бассейн наливается через две трубы. Через первую поступает a литров воды в минуту, а через вторую — b литров воды в минуту. Составьте формулу для определения количества воды в бассейне V через t минут после открытия кранов. Какие значения могут принимать переменные a и b ?
- 143** а) В России каждый работающий человек платит со своего заработка подоходный налог, составляющий 13%. Введите переменные и запишите формулу зависимости размера подоходного налога от величины заработка.
- б) Сотрудники некоторого предприятия отчисляют в пенсионный фонд 4% от заработной платы. Введите переменные и запишите формулу зависимости размера пенсионных отчислений от величины заработной платы.
- 144** а) Объем тетраэдра — треугольной пирамиды, все ребра которой равны (рис. 2.1), можно вычислить по приближенной формуле $V \approx \frac{7a^3}{60}$, где a — длина ребра. Найдите объем тетраэдра, если $a = 6$ см; $a = 12$ см.
- б) Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.2) вычисляется по формуле $S = 2(ab + ac + bc)$, где a , b и c — измерения параллелепипеда. Найдите площадь поверхности, если $a = 5$ см, $b = 7$ см, $c = 9$ см.
- в) Объем усеченной пирамиды с квадратными основаниями (рис. 2.3) вычисляется по формуле $V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$, где



■ Рис. 2.1



■ Рис. 2.2



■ Рис. 2.3

h — высота усечённой пирамиды. Найдите объём, если $h=15$ см, $a=20$ см, $b=10$ см.

■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ (145–146) ■

- 145** Если автомобиль едет со скоростью v км/ч, то его тормозной путь в метрах можно приближённо вычислить по формуле $s = 0,2v + 0,005v^2$ (тормозной путь автомобиля — это расстояние, которое он проезжает после того, как водитель нажал на тормоз).

а) Вычислите тормозной путь автомобиля, который едет со скоростью 60 км/ч; 100 км/ч.

б) Во сколько раз больше тормозной путь автомобиля при скорости 80 км/ч, чем при скорости 40 км/ч?

- 146** Формула $F = 1,8C + 32$ выражает зависимость между температурой в градусах Фаренгейта ($^{\circ}\text{F}$) и температурой в градусах Цельсия ($^{\circ}\text{C}$). В России нормальной температурой тела человека считается $36,6^{\circ}\text{C}$, а в странах, использующих шкалу Фаренгейта, $98,8^{\circ}\text{F}$. Где в качестве нормальной принята более высокая температура тела человека?

- 147** Решите задачу, пользуясь формулой $s = vt$:

а) Скорость автомобиля, движущегося по шоссе, 80 км/ч. За сколько секунд он проезжает расстояние между соседними километровыми столбами?

б) Расстояние между соседними километровыми столбами электропоезд проходит за 1 мин 12 с. Найдите скорость электропоезда, выразив её в километрах в час.

Выразите из формулы заданную величину (148–150).

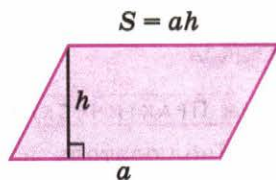
- 148** Выразите высоту h из формулы:

а) площади параллелограмма $S = ah$ (рис. 2.4);

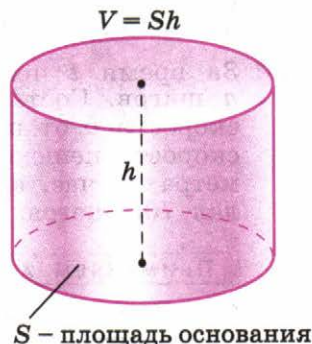
б) объёма цилиндра $V = Sh$ (рис. 2.5).

- 149** а) Из формулы площади треугольника

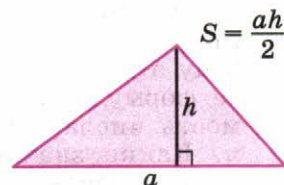
$S = \frac{ah}{2}$ (рис. 2.6) выразите h и a .



■ Рис. 2.4



■ Рис. 2.5



■ Рис. 2.6

б) Из формулы объёма пирамиды $V = \frac{Sh}{3}$ (рис. 2.7) выразите h и S .

150 Из физической формулы выразите переменную m :

а) $\rho = \frac{m}{V}$; в) $Q = cmt$;

б) $a = \frac{F}{m}$; г) $E = \frac{mv^2}{2}$.

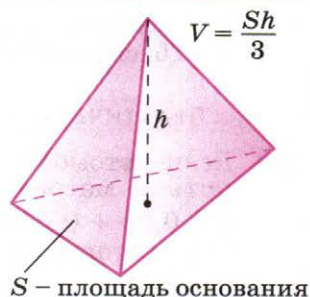


Рис. 2.7

Б

ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ (151–152)

151 Наблюдатель во время грозы считает, сколько секунд (t) прошло между вспышкой молнии и раскатом грома, и определяет, на каком расстоянии (S) он находится от эпицентра грозы. Составьте формулу для вычисления этого расстояния в километрах, если известно, что звук распространяется в воздухе со скоростью 330 м/с. Определите по этой формуле, на каком расстоянии от эпицентра грозы вы находитесь, если между вспышкой молнии и громом вы насчитали 6 с.

152 За время t человек, длина шага которого равна l , сделал n шагов. Составьте формулу, выражающую зависимость его скорости v от переменных t , l и n . Найдите по этой формуле скорость пешехода, выразив её в метрах в минуту и в километрах в час, если длина его шага 60 см и за 5 мин он сделал 700 шагов.

ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (153–155)

153 Олег живёт в многоэтажном доме. Он сосчитал число ступенек, ведущих от входа в подъезд к площадкам каждого из первых пяти этажей, и составил таблицу. Если бы Олег продолжил заполнение таблицы, какое число он записал бы в клетке, соответствующей 6-му этажу? 10-му этажу? Составьте формулу, выражающую зависимость числа ступенек N от этажа n . Какие значения могут принимать переменные n и N ? Найдите N , если $n = 15$.



Этаж	1	2	3	4	5
Число ступенек	5	21	37	53	69

- 154** Электропоезд проходит расстояние между соседними километровыми столбами за 1,5 мин. На сколько километров в час надо увеличить скорость, чтобы сократить это время на полминуты?
- 155** Легкоатлеты в процессе тренировки вырабатывают скоростную выносливость, увеличивая скорость во время бега. Например, бегун на дистанции 1500 м пробежал первые 250 м за 50 с, следующие 500 м — за 95 с и оставшиеся 750 м — за 140 с. Какую скорость (в км/ч) развил этот бегун на каждом из участков дистанции? (Ответы округляйте до десятых. Воспользуйтесь калькулятором.)

■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ (156–158) ■

- 156** Процент p уценки вещи может быть вычислен по формуле $p = 100\left(1 - \frac{r}{s}\right)$, где s — старая цена, а r — новая цена. Вычислите, на сколько процентов уценили книгу, если её цену снизили с 80 р. до 75 р. 50 к. (Ответ округлите до десятых.)
- 157** Размер обуви зависит от длины стопы. Существуют формулы, выражающие эту зависимость для мужских и женских размеров, принятых в некоторых англоговорящих странах: для мужской обуви $s = 3l - 26$ и для женской обуви $s = 3l - 22$, где s — размер обуви, l — длина стопы в дюймах. Какой английский размер подходит Наташе, если длина стопы у неё равна 30 см, и Игорю, если у него длина стопы 35 см? (1 дюйм $\approx$ 2,5 см.)
- 158** В нашей стране и в США для приближённой прикидки нормального веса взрослого человека пользуются разными формулами:
в России: $P = H - 100$, где P — вес в килограммах, H — рост в сантиметрах;
в США: $W = \frac{11}{2}H - 220$, где W — вес в фунтах, H — рост в дюймах.
Определите, какой вес считается нормальным в России и в США для человека ростом 180 см. Сравните полученные результаты. (1 фунт $\approx$ 0,454 кг, 1 дюйм $\approx$ 2,54 см. Воспользуйтесь калькулятором.)

2.2 Прямая пропорциональность. Обратная пропорциональность

1 В предыдущем пункте мы рассмотрели формулы площади прямоугольника $S = ab$, пути $s = vt$, стоимости $C = cm$, работы $P = pt$. Хотя эти формулы связывают разные величины и записываются разными буквами, они очень похожи: в левой части записана одна переменная, в правой — произведение двух других. Чтобы понять особенности зависимостей, описываемых подобными формулами, рассмотрим одну из них, а именно формулу пути $s = vt$.

Пусть движение совершается с постоянной скоростью, равной, например, 4 км/ч. Тогда пройденный путь s будет зависеть только от времени движения t . В таблице указаны время движения и соответствующее этому времени расстояние:

$v = 4 \text{ км/ч}$	
$t, \text{ ч}$	$s, \text{ км}$
1	4
2	8
3	12
2 · 4	16
5	20
6	24

Во сколько раз увеличивается время движения t , во столько же раз увеличивается пройденное расстояние s . Например, если время увеличивается в 2 раза, то и расстояние также увеличивается в 2 раза. Говорят, что при постоянной скорости расстояние прямо пропорционально времени движения.

Определение

Две величины называют **прямо пропорциональными**, если при увеличении одной из них в несколько раз другая увеличивается во столько же раз.

Вместо слов «прямо пропорциональные величины» можно говорить короче: «пропорциональные величины».

Итак, если движение равномерное, расстояние пропорционально времени движения. Очевидно также, что при постоянном времени расстояние пропорционально скорости движения: если скорость увеличить, например, в 3 раза, то за такое же время будет проделан путь, в 3 раза больший.

Точно так же стоимость товара при постоянной цене пропорциональна его количеству; стоимость товара при одном и том же количестве пропорциональна его цене.

Вообще любая формула, похожая на формулу $s = vt$, даёт нам два случая прямо пропорциональных величин. Все такие формулы могут быть представлены в виде $y = kx$, где буквами x и y обозначены переменные величины, а буквой k — та величина, которую мы считаем постоянной. Формулу

$$y = kx$$

называют **формулой прямой пропорциональности**, а число k — **коэффициентом пропорциональности**.

Формулу прямой пропорциональности часто записывают в виде $\frac{y}{x} = k$. Этим равенством выражается важное свойство прямой пропорциональности: *если две величины прямо пропорциональны, то отношение их соответственных значений равно одному и тому же числу — коэффициенту пропорциональности*.

- 2 Обратимся ещё раз к формуле $s = vt$. Пусть теперь постоянным будет пройденное расстояние; предположим, что оно равно 60 км. Тогда время, которое требуется, чтобы пройти это расстояние, зависит от скорости движения.

Выразим из формулы $s = vt$ время t и подставим $s = 60$; получим $t = \frac{60}{v}$. Найдём несколько пар соответственных значений v и t :

$s = 60$ км	
v , км/ч	t , ч
10	6
2 · 12	5 : 2
15	4
20	3
30	2
60	1

Во сколько раз увеличивается скорость v , во столько же раз уменьшается затрачиваемое время t . Например, если скорость увеличивается в 2 раза, то время уменьшается в 2 раза. Говорят, что при постоянном расстоянии время движения обратно пропорционально скорости движения. Можно сказать также, что скорость движения обратно пропорциональна времени движения.

Определение

Две величины называют **обратно пропорциональными**, если при увеличении одной из них в несколько раз другая уменьшается во столько же раз.

Например, при постоянной стоимости количество купленного товара обратно пропорционально его цене; при постоянном объеме работы время работы обратно пропорционально производительности.

Вообще если в формулах, подобных формуле $s = vt$, произведение постоянно, то две переменные величины связаны обратно пропорциональной зависимостью. В общем случае обратно пропорциональная зависимость может быть описана формулой

$$xy = k,$$

где x и y — переменные, k — постоянная. Её называют **формулой обратной пропорциональности**. Эта формула выражает важное свойство обратно пропорциональной зависимости: *если две величины обратно пропорциональны, то произведение их соответственных значений равно одному и тому же числу.*

Заметим, что формулу обратной пропорциональности принято записывать и в другом виде: $y = \frac{k}{x}$.

- Вода поступает в бассейн через трубу с постоянной скоростью $p = 25$ л/мин. Пользуясь формулой $V = pt$, где V — объем воды в бассейне, t — время работы трубы, заполните таблицу:

t , мин	10	20	30	40	50	60
V , л						

Объясните, почему зависимость объема воды в бассейне от времени работы трубы при постоянной скорости поступления воды является прямой пропорциональностью. Чему равно отношение объема воды ко времени её поступления?

- На 200 р. надо купить яблок одного сорта. Пользуясь формулой $m = \frac{C}{c}$, где C — стоимость покупки, c — цена одного килограмма яблок, m — масса купленных яблок, заполните таблицу:

c , р.	50	40	25	20	10
m , кг					

а) Объясните, почему зависимость массы купленных яблок m от их цены c является обратной пропорциональностью. Чему равно произведение цены яблок на их массу?

б) В какой зависимости находится цена яблок c от массы купленных яблок m при постоянной стоимости покупки?

A

- 159** Мотоциклист за некоторое время проехал расстояние, равное 30 км.
- а) Какое расстояние проедет за это же время автомобиль, если его скорость в 2 раза больше? в 3 раза больше?
 - б) Какое расстояние проедет за это же время велосипедист, если его скорость в 2 раза меньше? в 3 раза меньше?
- 160** С помощью электромотора за 7 с можно накачать в бак 20 л воды.
- а) За какое время можно наполнить бак, вмещающий 200 л воды? 120 л воды?
 - б) Сколько воды можно накачать в бак за 14 с? за 35 с?
- 161** Среди зависимостей, заданных формулой, определите те, которые являются прямой пропорциональностью, и объясните смысл коэффициента пропорциональности:
- а) $C = 5t$, где C — стоимость междугороднего телефонного разговора (в р.), t — время разговора (в мин);
 - б) $N = 30n + 20$, где N — стоимость проката велосипеда, n — число дней, на которые был взят велосипед;
 - в) $C = \pi d$, где C — длина окружности, d — диаметр окружности;
 - г) $S = \pi r^2$, где S — площадь круга, r — радиус круга.
- 162** Велосипедист проехал расстояние от станции до турбазы за 30 мин.
- а) За какое время пройдёт это же расстояние турист, скорость которого в 3 раза меньше скорости велосипедиста?
 - б) За какое время проедет это же расстояние мотоциклист, скорость которого в 5 раз больше скорости велосипедиста?
- 163** Шесть насосов выкачивают всю воду из бассейна за 10 ч.
- а) Сколько надо таких же насосов, чтобы выкачать воду из этого бассейна за 5 ч? за 15 ч?
 - б) За какое время выкачают всю воду из этого бассейна 3 таких же насоса? 9 таких же насосов?



- 164** а) Заготовленного запаса кормов хватит двум кроликам на 120 дней. На сколько дней такого же запаса кормов хватит 10 кроликам? 12 кроликам?
- б) Три трактора могут вспахать поле за 18 ч. Сколько потребуются тракторов, чтобы вспахать это поле за 9 ч? за 27 ч?
- 165** Среди зависимостей, заданных формулой, определите те, которые являются обратной пропорциональностью, найдите произведение соответственных значений переменных и объясните смысл этого произведения:
- а) $h = \frac{60}{a^2}$, где a — сторона квадрата, лежащего в основании параллелепипеда, h — высота параллелепипеда;
- б) $a = \frac{12}{h}$, где h — ширина прямоугольника, a — его длина;
- в) $n = \frac{100}{m}$, где m — грузоподъёмность машины, n — число машин, необходимых для перевозки груза;
- г) $n = \frac{M}{12}$, где M — масса груза, который необходимо перевезти, n — число машин, необходимых для перевозки груза.
- 166** ■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ ■ Летний салат на 6 порций включает 300 г помидоров, 250 г молодого картофеля, 200 г огурцов, 3 яйца, 120 г зелёного лука, 50 г укропа, 100 г сметаны, 50 г майонеза. Подсчитайте расход продуктов для 3 порций салата; для 12 порций салата.



■ РАССУЖДАЕМ (167–171) ■

- 167** Некоторое количество чая надо развесить в одинаковые упаковки. Установите зависимость между массой упаковки и количеством упаковок и заполните таблицу:

а)

Масса упаковки, г	Количество упаковок
60	80
240	...
30	...
300	...

б)

Масса упаковки, г	Количество упаковок
150	30
...	90
...	180
...	15

- 168** На заработанные в каникулы деньги Виктор может купить 6 одинаковых по цене компакт-дисков с любимыми фильмами.
- а) Сколько компакт-дисков он мог бы купить на эти деньги, если бы их цена была в 1,5 раза меньше? в 2 раза больше?
- б) Сколько компакт-дисков купил Николай, если он заработал в 2 раза больше денег, чем Виктор, и купил диски по цене, в 1,5 раза большей?

- 169** За 12 с участник школьных соревнований пробежал 60 м.
- а) Если он будет бежать с той же скоростью, то за сколько секунд он пробежит 40 м? 100 м?
- б) За какое время пробежит 200 м спортсмен, скорость которого в 2 раза больше?

- 170** Задайте формулой указанную зависимость и определите, прямой или обратной пропорциональностью она является:

- а) зависимость числа m одинаковых учебников, размещаемых на полке длиной 90 см, от толщины учебника l (в см);
- б) зависимость израсходованного бензина V (в л) от пройденного автомобилем пути s (в км) при расходе 0,08 л бензина на 1 км пути;
- в) зависимость времени t (в мин), за которое на принтере можно распечатать 200 страниц, от скорости печати принтера v (в с./мин);
- г) зависимость стоимости Z (в р.) рулона ткани от длины l (в м) этого рулона при цене одного метра 30 р.

- 171** Определите, является прямой или обратной пропорциональностью зависимость:

- а) периметра квадрата от длины его стороны;
- б) площади квадрата от длины его стороны;
- в) величины одного из смежных углов от величины другого;
- г) длины одной из сторон прямоугольника данной площади от длины другой его стороны.

Б

Определите, о какой зависимости идёт речь в задаче, и решите её (172–174).

- 172** а) Четыре машинистки, работающие с одинаковой производительностью, за 3 дня напечатали 222 страницы. Сколько страниц могут напечатать две из этих машинисток за 12 дней?
 б) Из 180 г шерсти можно связать шарф шириной 12 см и длиной 2 м. Сколько шерсти потребуется на шарф шириной 36 см и длиной 1 м?
- 173** а) На облицовку плиткой подъезда в строящемся доме ушло 18 дней. За сколько дней можно было бы выполнить эту же работу, если повысить производительность труда на 20%?
 б) Отчёт группы исследователей был распечатан на принтере за 30 мин. За какое время можно распечатать этот отчёт на принтере, производительность которого на 50% меньше?
- 174** После специального ухода за кустами садовод с 6 кустов смородины получил такой же урожай, как прежде с 8 кустов. На сколько процентов повысилась урожайность кустов? (Ответ округлите до единиц.)



■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ (175–176) ■

- 175** Пряники стали продавать в новой упаковке, при этом масса пряников была увеличена на 25% по сравнению с массой в старой упаковке. На сколько процентов подешевели пряники, если стоимость упаковки осталась прежней?
- 176** а) В связи с увеличением числа учащихся школьная столовая стала закупать в 1,2 раза больше муки для пирожков. Как изменились расходы столовой на муку, если она подорожала с 20 до 30 р. за килограмм?
 б) Из-за неурожая какао-бобов, используемых в производстве шоколада, страна-поставщик увеличила их цену в 1,5 раза. В связи с этим кондитерская фабрика «Шоколад» вместо 20 т какао-бобов в день стала перерабатывать 16 т. Как изменились ежедневные затраты фабрики на закупку какао-бобов?
 в) Стоимость минуты телефонного разговора по мобильной связи была снижена на 20%. Как при этом изменятся расходы Николая на телефон, если он сократит время разговоров в 2 раза?

2.3 Пропорции.

Решение задач с помощью пропорций

Пешеход, который идёт с постоянной скоростью, за 10 мин прошёл 750 м, а за 20 мин — 1500 м. Очевидно, что отношения $\frac{750}{10}$ и $\frac{1500}{20}$ равны, так как они выражают одну и ту же величину — скорость движения пешехода в метрах в минуту, поэтому можно записать равенство $\frac{750}{10} = \frac{1500}{20}$. Такие равенства называют пропорциями.

Определение

Если отношение $\frac{a}{b}$ равно отношению $\frac{c}{d}$, то равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ называют **пропорцией**.

Читают пропорцию по-разному. Помимо дословного перевода с буквенного языка: «отношение a к b равно отношению c к d », можно говорить иначе: « a так относится к b , как c относится к d ». Числа, образующие пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, имеют специальные названия: a и d называют *крайними членами*, а b и c — *средними членами*. Происхождение этих терминов станет совершенно понятным, если записать пропорцию в строчку: $a : b = c : d$ (рис. 2.8).



Рис. 2.8

А как узнать, является ли равенство вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ пропорцией? Например, является ли пропорцией равенство $\frac{0,2}{0,35} = \frac{8}{14}$? Это можно сделать, вычислив каждое из отношений, а можно воспользоваться известным правилом сравнения дробей. Воспользовавшись вторым способом, получим, что $0,2 \cdot 14 = 8 \cdot 0,35$, т. е. наше равенство — пропорция.

Любая пропорция обладает следующим свойством:

произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов.

Сформулированное утверждение называют **основным свойством пропорции**. С помощью букв его можно записать так:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } ad = bc.$$

Убедимся в справедливости основного свойства. Для этого умножим каждое из равных отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ на bd :

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{abd}{b} = ad, \quad \frac{c}{d} \cdot bd = \frac{cbd}{d} = bc.$$

Так как при умножении равных чисел на одно и то же число получаются равные числа, то $ad = bc$.

С помощью основного свойства пропорции любой её член можно выразить через три других. Это позволяет по трём известным членам пропорции находить неизвестный.

Пример 1. Найдём неизвестный член пропорции $\frac{28}{7} = \frac{56}{x}$.

По основному свойству пропорции имеем

$$28x = 7 \cdot 56.$$

Отсюда легко найти неизвестный множитель x :

$$x = \frac{7 \cdot 56}{28} = 14.$$

3 Задачи, в которых речь идёт о прямо пропорциональных или обратно пропорциональных величинах, удобно решать с помощью пропорций.

Пример 2. На 6 одинаковых костюмов потребовалось 22 м ткани. Сколько ткани нужно для пошива 15 таких же костюмов?

Обозначим через x количество ткани (в м), которое требуется для пошива 15 костюмов, и запишем кратко условие задачи:

$$\begin{array}{l} 6 \text{ кост.} - 22 \text{ м,} \\ 15 \text{ кост.} - x \text{ м.} \end{array}$$

Количество ткани прямо пропорционально числу костюмов: во сколько раз увеличивается число костюмов, во столько же раз увеличивается и расход ткани. Поэтому отношения $\frac{15}{6}$ и $\frac{x}{22}$ равны.

Получаем пропорцию $\frac{15}{6} = \frac{x}{22}$.

Из этой пропорции находим неизвестное число x :

$$x = \frac{15 \cdot 22}{6} = 55.$$

Таким образом, для пошива 15 костюмов требуется 55 м ткани.



Решим эту же задачу, составив другую пропорцию. Возьмём отношения $\frac{22}{6}$ и $\frac{x}{15}$. Каждое из них показывает, сколько ткани идёт на один костюм, следовательно, эти отношения равны. Имеем пропорцию $\frac{22}{6} = \frac{x}{15}$. Отсюда находим, что $x = 55$.

Пример 3. Чай расфасовали в 30 пачек по 150 г в каждой. Сколько пачек получится, если это же количество чая фасовать в пачки по 250 г?

Обозначим через x количество пачек чая по 250 г и кратко запишем условие задачи:

$$\begin{aligned} 150 \text{ г} & - 30 \text{ пачек,} \\ 250 \text{ г} & - x \text{ пачек.} \end{aligned}$$

Количество пачек чая обратно пропорционально массе одной пачки: во сколько раз увеличится масса пачки, во столько же раз уменьшится количество пачек. Теперь надо составить равные отношения. Здесь важно не ошибиться: отношение $\frac{250}{150}$ равно не отношению $\frac{x}{30}$, а обратному отношению $\frac{30}{x}$. Получаем пропорцию

$$\frac{250}{150} = \frac{30}{x}.$$

Из пропорции находим x :

$$x = \frac{150 \cdot 30}{250} = 18.$$

Итак, если фасовать чай в пачки по 250 г, то получится 18 пачек.

Решим задачу другим способом, который вы, возможно, считаете более простым.

В пачки по 150 г и по 250 г фасовали одно и то же количество чая, поэтому произведения $150 \cdot 30$ и $250 \cdot x$ равны:

$$150 \cdot 30 = 250 \cdot x.$$

Отсюда легко найти неизвестный множитель x .

- Сформулируйте определение пропорции.
- Запишите каждое утверждение в виде пропорции, назовите крайние члены и средние члены пропорции:
 - а) 18 так относится к 6, как 15 относится к 5;
 - б) отношение 100 к 30 равно отношению 40 к 12;
 - в) 70 во столько раз больше 50, во сколько раз 14 больше 10;
 - г) 5 составляет такую же часть от 15, какую 6 составляет от 18.
- а) Сформулируйте основное свойство пропорции.
- б) Найдите неизвестный член пропорции $\frac{15}{12} = \frac{10}{x}$.

- Составьте две разные пропорции по условию задачи, как это сделано в примере 2:
«На 10 одинаковых юбок требуется 8 м ткани. Сколько метров этой ткани потребуется на 6 таких же юбок?»
- Решите задачу двумя способами, как это сделано в примере 3:
«Конфеты расфасовали в 20 упаковок по 200 г в каждой. Сколько упаковок получится, если это же количество конфет расфасовать в упаковки по 125 г?»

А

- 177** **ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО** Проверьте двумя способами, является ли пропорцией следующее равенство:

а) $\frac{14}{70} = \frac{25}{125}$; б) $42 : 3 = 26 : 2$; в) $\frac{7,5}{15} = \frac{0,6}{1,2}$; г) $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = 4 : 3$.

- 178** Найдите неизвестный член пропорции:

а) $\frac{x}{10} = \frac{4}{5}$; в) $\frac{0,4}{b} = \frac{2}{7}$; д) $3 : y = 2 : 5$; ж) $x : 1,4 = 3 : 0,7$;
 б) $\frac{6}{a} = \frac{3}{4}$; г) $\frac{3}{8} = \frac{y}{3,2}$; е) $6 : 7 = 9 : c$; з) $9 : 0,8 = a : 1,6$.

- 179** **ФОРМУЛИРУЕМ АЛГОРИТМ** Из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ выразите число a ; число b . Сформулируйте правило нахождения неизвестного крайнего члена пропорции; неизвестного среднего члена пропорции.

- 180** Обозначьте неизвестную величину буквой и составьте разные пропорции по условию задачи:
 а) Таня занимается рассылкой объявлений. Она запечатывает 100 конвертов за 16 мин. Сколько конвертов запечатает она за 40 мин, если будет работать с такой же скоростью?
 б) Ольга может за 30 с набрать на компьютере 160 знаков. Сколько знаков она наберёт за 5 мин, если будет работать с той же скоростью?

Решите задачу (**181–184**).

- 181** а) За 2,5 ч выпало 1,5 мм осадков. Сколько осадков выпало бы за 6 ч, если бы дождь шёл с такой же силой?
 б) За 2,5 мин на принтере распечатали 15 страниц. За какое время можно распечатать на этом принтере 100 страниц?
- 182** Масштаб карты 1 : 5 000 000.
 а) Расстояние между Москвой и Курском на карте равно 9 см. Чему равно это расстояние в действительности?
 б) Расстояние между Москвой и Ригой 900 км. Чему равно это расстояние на карте?

- 183** В любой окружности отношение длины окружности к её диаметру одно и то же и приближённо равно $\frac{22}{7}$.
- а) Определите длину окружности, диаметр которой равен 3 см.
 б) При каком диаметре длина окружности равна 10 см?
 (Ответы округляйте до десятых.)
- 184** а) Если в стакан насыпать 8 столовых ложек сахара, то заполнится $\frac{2}{3}$ стакана. Хватит ли 11 столовых ложек сахара, чтобы наполнить стакан?
 б) Автомобиль проехал 280 км, затратив 21 л бензина. Хватит ли бака бензина, вмещающего 40 л, чтобы проехать 500 км?
- 185** ■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ ■ Рассчитайте рецепт приготовления блюда: а) Для 4 порций приправы требуется $\frac{1}{3}$ чайной ложки соли, $\frac{1}{4}$ чайной ложки перца и $\frac{1}{2}$ чайной ложки гвоздики. Сколько соли, перца и гвоздики потребуется для 30 порций?
 б) В соответствии с рецептом пирога на 4 яйца требуется 1,5 стакана сахарного песка и $\frac{2}{3}$ стакана муки. Сколько сахарного песка и муки потребуется, если тесто готовится из 9 яиц?
- 186** ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Прочитайте задачу: «Если ехать на автомобиле со скоростью 65 км/ч, то от одного посёлка до другого можно проехать за 20 мин. Велосипедист проехал этот же путь за 2 ч. С какой скоростью ехал велосипедист?»
 В каком случае пропорция по условию задачи составлена правильно, если буквой x обозначена скорость велосипедиста (в км/ч)?
- 1) $65 : x = \frac{1}{3} : 2$ 2) $x : 65 = 2 : \frac{1}{3}$ 3) $65 : x = 2 : 20$ 4) $65 : x = 2 : \frac{1}{3}$

Б

■ РАССУЖДАЕМ (187–188) ■

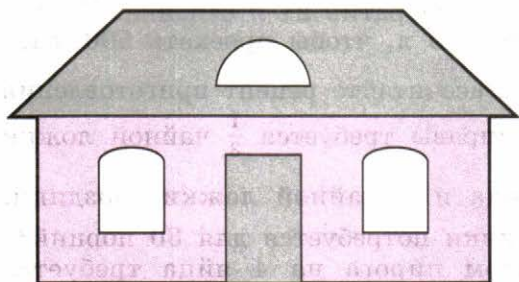
- 187** Составьте различные пропорции, используя следующие произведения:
 а) $4 \cdot 8 = 2 \cdot 16$; в) $6 \cdot 9 = 3 \cdot 18$;
 б) $25 \cdot 3 = 15 \cdot 5$; г) $4,8 \cdot 0,4 = 1,6 \cdot 1,2$.
- 188** Для каждой тройки чисел найдите четвёртое число так, чтобы из этих четырёх чисел можно было составить пропорцию:
 а) 20, 5, 7; б) 10, 16, 3.
 Сколько таких чисел вы нашли в каждом случае?

189 Найдите неизвестное число x , если:

а) $\frac{2x}{9} = \frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{5} = \frac{2}{5x}$; в) $\frac{1,5}{4x} = \frac{0,3}{10}$; г) $\frac{2}{x} = \frac{x}{8}$.

190 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ На рисунке 2.9 изображён чертёж фасада дома, выполненный в некотором масштабе. Длина фасада реального дома равна 9 м. Выполните на чертеже необходимые измерения и определите:

- а) высоту стен реального дома;
б) высоту дома с учётом крыши.



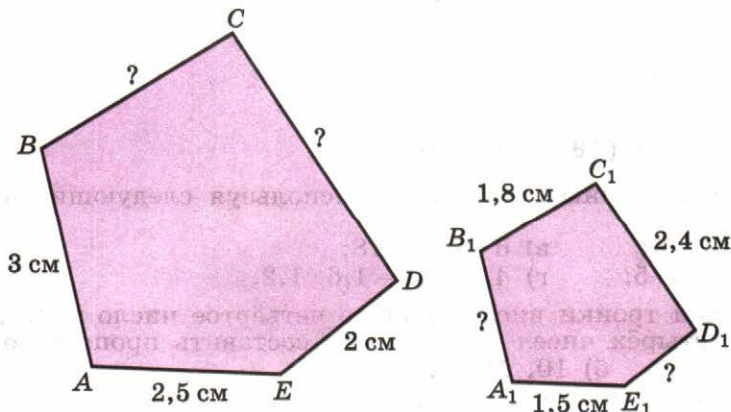
■ Рис. 2.9

191 На рисунке 2.10 фигура $A_1B_1C_1D_1E_1$ является копией фигуры $ABCDE$, полученной с помощью копировальной машины, которая уменьшает все размеры в одно и то же число раз.

- а) Найдите неизвестные длины сторон.
б) Дополните равенства так, чтобы получились пропорции:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AE}{A_1E_1}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}, \quad \frac{...}{CD} = \frac{D_1E_1}{...}.$$

- в) Найдите отношение периметров этих фигур.



■ Рис. 2.10

- 192** а) На участке железнодорожного пути старые 8-метровые рельсы меняют на новые 12-метровые. Снято 180 старых рельсов. На сколько меньше потребуется новых рельсов, чтобы заменить старые?
 б) Двигаясь со скоростью 50 км/ч, электропоезд прошёл перегон за 12 мин. На сколько надо увеличить скорость, чтобы сократить время прохождения этого перегона на 2 мин?
- 193** Чтобы связать шарф размером 20×100 см, потребуется 125 г шерсти. Сколько такой же шерсти нужно, чтобы связать шарф размером 12×80 см? 24×120 см?
- 194** Проехав 40% всего пути за 2,4 ч, водитель автомобиля сделал остановку. Следующую остановку он планирует сделать в пункте, после которого ему останется проехать четверть всего пути. Через какое время он сделает вторую остановку, если будет ехать с той же скоростью?
- 195** а) Девять рабочих, работая с одинаковой производительностью, могут выполнить работу за 10 ч. Сколько ещё нужно рабочих, чтобы эта работа была выполнена за 6 ч?
 б) Через две трубы вода из бассейна выливается за 3 ч. Сколько ещё надо подключить труб, чтобы вода вылилась за 2 ч?
- 196** а) Одна машинистка может перепечатать рукопись за 15 ч, а другая эту же рукопись — за 25 ч. Они вместе отпечатали рукопись, одновременно начав и закончив работу. Первая отпечатала 150 страниц. Сколько страниц отпечатала вторая машинистка и сколько страниц в рукописи?
 б) Одно и то же расстояние один пешеход проходит за 2 ч, а другой — за 3 ч. Они одновременно вышли навстречу друг другу, первый из пункта А, второй из пункта В, и встретились в 3,6 км от пункта А. Чему равно расстояние между пунктами?

197 ■ ИССЛЕДУЕМ ■

а) Дана пропорция $16 : 10 = 24 : 15$. Убедитесь, что вы вновь получите пропорцию, если:
 поменяете местами крайние члены;
 поменяете местами средние члены;
 замените каждое отношение обратным.

б) Используя пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, запишите три новые пропорции. (Убедитесь в том, что полученные равенства действительно являются пропорциями.) Сформулируйте соответствующие свойства пропорции.

в) Чему равно отношение a к b , если известно, что

$$a : 1,2 = b : 1,5; \quad 0,9 : b = 2,7 : a?$$

2.4 Пропорциональное деление

- 1 Задача 1. Три фирмы вложили в некоторый проект соответственно 6, 4 и 2 млн р. и получили 24 млн р. прибыли. Как они должны разделить эту прибыль?

Обычно считается, что распределение прибыли должно соответствовать долям средств, внесённых в проект его участниками. Деньги, вложенные первой и второй фирмами, относятся как 6 к 4, а второй и третьей — как 4 к 2. В таких случаях вместо двух отношений $6:4$ и $4:2$ пишут одно «длинное» отношение $6:4:2$ и говорят: «как шесть к четырём, к двум». Именно в таком отношении $6:4:2$ должна быть распределена полученная прибыль.

Наши рассуждения привели нас к хорошо знакомой задаче на части. Всего имеется $6 + 4 + 2 = 12$ частей, поэтому на каждую часть приходится $24 : 12 = 2$ млн р. Следовательно, первая фирма должна получить $2 \cdot 6 = 12$ млн р., вторая — $2 \cdot 4 = 8$ млн р. и третья — $2 \cdot 2 = 4$ млн р.

Заметим, что рассмотренное в задаче отношение $6:4:2$ можно было бы *сократить*, т. е. разделить каждое из входящих в него чисел на их общий делитель — число 2. Тогда мы получили бы более простое отношение $3:2:1$. В этом случае было бы всего 6 частей, однако каждая часть составляла бы 4 млн р.

Система распределения прибыли, описанная в этой задаче, называется *пропорциональной*. Слово «пропорциональный» происходит от латинского *pro-portione*, означающего «соответственно порциям», «согласно долям», «по количеству». Можно сказать, что прибыль разделили пропорционально суммам, вложенным в проект.

- 2 Задача 2. Участок земли разделили между четырьмя фермерами пропорционально количеству членов их семей. В семье первого фермера 4 человека, в семье второго — 6 человек, третьего — 7 человек и в семье четвёртого фермера — 3 человека. Какой процент площади участка получил каждый фермер?

Площадь всего участка составляет 100%, и эти 100% нужно разделить пропорционально числам 4, 6, 7 и 3, т. е. в отношении $4:6:7:3$. Это тоже задача на части. Всего мы имеем 20 частей, поэтому на каждую часть приходится 5%. Значит, фермеры получили соответственно 20%, 30%, 35% и 15% площади участка.

- Объясните, как образовано «длинное» отношение $6:4:2$ в задаче 1.
- Тест включает 30 задач: 6 задач по арифметике, 15 — по алгебре, остальные — по геометрии. В каком отношении в тесте находятся: арифметические, алгебраические и геометрические задачи?
- Объясните происхождение и смысл слова «пропорциональный».
- Сколько процентов выплаченной за работу суммы получил каждый из трёх участников, если она была распределена между ними в отношении $5:3:2$ (фрагмент 2)?

А

198 Упростите отношение, сократив его:

а) $18 : 3 : 9$; б) $10 : 15 : 15$; в) $8 : 4 : 2 : 6$; г) $12 : 42 : 30 : 24$.

199 Отношение, членами которого являются дробные числа, можно заменить отношением целых чисел, если умножить все его члены на одно и то же не равное нулю число. Упростите отношение:

а) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{4}$; б) $1\frac{1}{3} : 1\frac{1}{2} : 1$; в) $0,5 : 1 : 1,5$; г) $4,5 : 2,7 : 1,8$.

200 1) Распределите 70 билетов между тремя классами пропорционально числам 2, 3 и 5.

2) Разделите число x на части, пропорциональные числам a, b, c .

201 Осенью учащиеся трёх классов работали в теплицах: 5 класс — 28 ч, 6 класс — 42 ч, 7 класс — 56 ч. Тепличное хозяйство оплатило их работу в размере 54 000 р. Как разделить эту сумму между тремя классами?

202 Из лекарственных трав — шалфея, ромашки и валерианы — составили сбор, взяв их в отношении $2 : 5 : 3$. Какой процент этого сбора составляет каждая из трав?

203 Три цветовода решили выращивать цветы на продажу. В дело они вложили соответственно 2 тыс., 1,3 тыс. и 1,7 тыс. р. Какой процент прибыли получит каждый из них?

204 1) В выставке собак участвовали собаки больших, средних и мелких пород, число которых находилось в отношении $4 : 8 : 3$. Сколько всего собак на выставке, если:

а) собак мелких пород всего 6;

б) собак больших и средних пород вместе 36;

в) собак средних пород на 20 больше, чем мелких?

2) Для подготовки викторины «Крупнейшие столицы мира» учащиеся составили вопросы по темам «Географическое положение», «Климат», «Экономика», «Культура», которые решили взять в отношении $4 : 2 : 1 : 5$. Сколько всего вопросов будет в викторине, если включить:

а) x вопросов по географическому положению;

б) y вопросов по экономике и культуре?



Б

- 205** Всего имеется 350 г семян. Их надо насыпать в три пакета так, чтобы масса семян в первом пакете составила 50% массы семян во втором, а масса семян во втором пакете составила 50% массы семян в третьем. Сколько семян будет в каждом пакете?
- 206** Фермер купил три газонокосилки, заплатив за них 32 000 р. За каждую из них он дал продавцу одно и то же количество купюр, причём за первую газонокосилку он заплатил купюрами достоинством в 1000 р., за вторую — в 500 р., за третью — в 100 р. Сколько стоит каждая газонокосилка?
- 207** Фирмам А, В и С принадлежит 75% акций некоторого предприятия, которые распределены между ними в отношении 4 : 12 : 9. Остальными 350 000 акций владеют работники этого предприятия. Сколько акций имеет каждая из фирм?
- 208** Периметр треугольника ABC равен 15,5 см. Найдите длины сторон этого треугольника, если AB относится к BC как 3 к 5, а BC относится к AC как 2 к 3.
- 209** Призы на сумму 12 400 р. были присуждены трём призёрам соревнования так, что сумма, полученная вторым, составила $\frac{2}{3}$ от суммы, полученной первым. В то же время сумма, полученная вторым, относится к сумме, полученной третьим, как $1\frac{1}{3} : \frac{4}{5}$. Сколько рублей получил каждый призёр?

2.5 Задачи на «сложные» пропорции

(Для тех, кому интересно)

Задача. Бригада студентов из 16 человек за 20 дней собрала 180 т картофеля. Сколько картофеля уберёт бригада из 12 человек за 28 дней, если будет работать с такой же производительностью?

Решение. Запишем кратко условие задачи:

16 человек — 20 дней — 180 т,
12 человек — 28 дней — x т.

Будем последовательно переходить от одного значения величины к другому, пока не получим нужный результат:

16 человек за 20 дней собрали 180 т;

1 человек за 20 дней соберёт в 16 раз меньше, т. е. $\frac{180}{16}$ т;

12 человек за 20 дней соберут в 12 раз больше, т. е. $\frac{180 \cdot 12}{16}$ т;

12 человек за 1 день соберут в 20 раз меньше, т. е. $\frac{180 \cdot 12}{16 \cdot 20}$ т;

12 человек за 28 дней соберут в 28 раз больше, т. е. $\frac{180 \cdot 12 \cdot 28}{16 \cdot 20}$ т.

Теперь проведём вычисления: $\frac{180 \cdot 12 \cdot 28}{16 \cdot 20} = 189$ (т).

Ответ. 189 т.

Пользуясь этим приёмом, решите следующие задачи.

- 210** В конноспортивной школе на 5 лошадей за 30 дней расходуются 1000 кг овса. На сколько дней хватит 200 кг овса для 10 лошадей при той же норме?

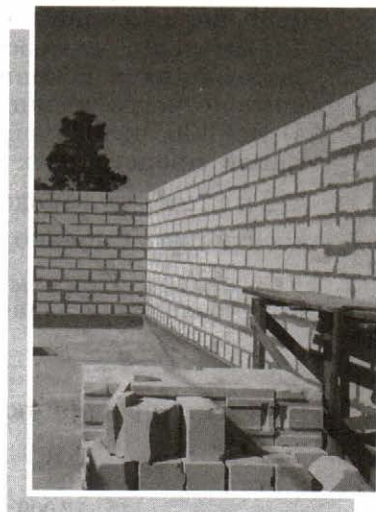
- 211** При строительстве здания 3 строителя за 8 ч выложили из кирпичей фрагмент стены объёмом 6 м^3 . За какое время смогла бы выложить фрагмент стены объёмом 15 м^3 бригада из 4 человек, если их производительность на 20% выше?

- 212** Для 15 человек, отправляющихся в экспедицию на 20 дней, заготовили 300 бутылок воды.

а) Сколько бутылок воды при той же норме надо добавить к уже заготовленным, если в экспедицию отправится 20 человек на 30 дней?
б) На сколько дней хватит 500 бутылок воды, если в экспедицию отправится 10 человек?

в) Сколько человек можно отправить в 10-дневную экспедицию, если заготовлено 200 бутылок воды?

- 213** Команда из трёх операторов, работая по 6 ч в день, за 4 дня набрала на компьютере 700 страниц рукописи. Оставшиеся 350 страниц требуется набрать за 2 дня, причём компьютерный зал будет предоставляться только на 2 ч в день. На сколько человек нужно увеличить команду, чтобы она смогла выполнить эту задачу?



Дополнительные задания

● Пропорции. Решение задач

214 Найдите неизвестный член пропорции:

а) $\frac{x}{2,25} = \frac{2}{1,5}$; б) $\frac{4,5}{18} = \frac{x}{2,5}$; в) $\frac{1,75}{0,85} = \frac{2,4}{x}$; г) $\frac{0,23}{x} = \frac{6,9}{15}$.

215 Дано равенство $xy = zv$. Составьте четыре пропорции, членами которых являются те же числа x , y , z и v .

216 Известно, что $15x = 12y$. Найдите отношение x к y .

217 Известно, что 20% числа a равны 30% числа b . Найдите отношение a к b .

218 Решите задачу, составив пропорцию:

а) В библиотеке 8 тыс. книг. Книги для детей составляют 35% всех книг. Сколько в библиотеке книг для взрослых?

б) В первый день открытия библиотеки в неё записались 42 читателя, что составило 17,5% всех читателей библиотеки, записавшихся к концу месяца. Сколько читателей стало в библиотеке через месяц после её открытия?

в) Из 300 читателей библиотеки 108 человек — школьники. Какой процент всех читателей составляют школьники?

Образец. В городе 72 тыс. жителей. Из них 18% — дети до десяти лет. Сколько детей до десяти лет живёт в этом городе?

Решение. Примем всё население города за 100% и запишем кратко условие задачи:

$$\begin{array}{l} 72\,000 — 100\%, \\ x — 18\%. \end{array}$$

Составим пропорцию:

$$\frac{72\,000}{x} = \frac{100}{18}.$$

$$\text{Найдём } x: x = \frac{72\,000 \cdot 18}{100} = 12\,960.$$

Ответ. В городе 12 960 детей до десяти лет.

219 а) В строительстве бассейна используют белый и чёрный кафель в отношении 5 : 2. Сколько надо белого кафеля, если требуется 450 плиток чёрного?

б) В сплаве, состоящем из золота и меди, масса золота относится к массе меди как 6 : 5. Найдите массу золота в сплаве, содержащем 75 г меди.

220 Размеры участка земли прямоугольной формы 30 и 50 м. Начертите план этого участка в масштабе 1 : 500. Укажите на

плане возможное расположение ворот, если они будут установлены на длинной стороне участка на расстоянии 20 м от одного из углов и ширина их будет равна 3 м.

- 221** Плавательный бассейн наполнился водой за 90 мин до отметки 35 см. Сколько ещё потребуется времени, чтобы он наполнился до отметки 140 см?
- 222** Бассейн при одновременном включении 4 кранов заполняется водой за $\frac{3}{4}$ ч. За какое время тот же бассейн заполняется водой при одновременном включении 6 таких же кранов?
- 223** Проехав 80 км, автомобиль израсходовал 5,6 л бензина. Какое расстояние может проехать автомобиль с полным баком, вмещающим 40 л бензина? (Ответ округлите до десятков.)



● Пропорциональное деление

- 224** Число учащихся первых, вторых, третьих и четвёртых классов в начальной школе пропорционально числам 8, 10, 9 и 9.
- Найдите число всех учащихся начальной школы, если в третьих классах учится 63 ученика.
 - Найдите число учащихся в каждой параллели, если известно, что во вторых классах на 8 учеников больше, чем в третьих.
 - Найдите число учащихся вторых классов, если в первых и третьих вместе учится 102 ученика.
- 225** Сумма двух сторон треугольника — большей и меньшей — равна 4,5 дм, а его стороны пропорциональны числам 2, 4 и 5. Чему равен периметр этого треугольника?
- 226** В сплав входят медь, олово и сурьма в отношении 4 : 15 : 6. Сколько процентов сплава составляет каждый металл? Какова масса сплава, если в нём меди меньше, чем олова, на 880 г?
- 227** Для первых классов приобрели 588 тетрадей. Сколько тетрадей получит каждый класс, если число учащихся 1А и 1Б классов находится в отношении 3 : 4, а число учащихся 1В и 1Г классов в отношении 8 : 7?

- 228** Отрезок AB , длина которого 7 см (рис. 2.11), разделён точками K , M и P на 4 части в отношении $3:5:4:2$. На сколько сантиметров длина отрезка AP больше длины отрезка KB ?



■ Рис. 2.11

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

1. Какие величины называют прямо пропорциональными? Приведите примеры прямо пропорциональных величин. Запишите общую формулу прямо пропорциональной зависимости.
2. Сформулируйте свойство прямо пропорциональных величин. Для зависимости пути от времени движения, рассмотренной в объяснительном тексте п. 2.2, назовите переменные величины, постоянную величину. Чему равно отношение соответственных значений пропорциональных величин? Чему равен коэффициент пропорциональности?
3. Какие величины называют обратно пропорциональными? Приведите примеры обратно пропорциональных величин. Запишите общую формулу обратно пропорциональной зависимости.
4. Сформулируйте свойство обратно пропорциональных величин. Для зависимости времени движения от его скорости, рассмотренной в объяснительном тексте п. 2.2, назовите переменные величины, постоянную величину. Чему равно произведение соответственных значений обратно пропорциональных величин?
5. Дайте определение пропорции. Приведите пример пропорции и назовите её крайние и средние члены.
6. Сформулируйте основное свойство пропорции. Как найти неизвестный член пропорции $\frac{a}{8} = \frac{5}{4}$?
7. Придумайте задачу на пропорциональное деление какой-либо величины.

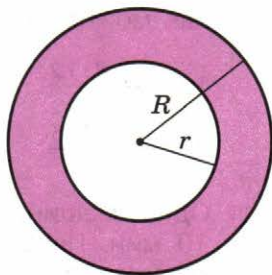
Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

1. Расстояние между двумя городами 600 км. Автомобиль выехал из одного города в другой. Запишите формулу для вычисления расстояния s , которое ему осталось проехать через t ч, если он едет со скоростью v км/ч.

2. Используя формулу $F = \frac{9}{5}C + 32$, выражающую зависимость между температурой, измеряемой по шкале Фаренгейта (F) и по шкале Цельсия (C), выразите в градусах Фаренгейта температуру кипения воды 100°C и температуру заморзания воды 0°C .
3. Пешеход за некоторое время прошёл 12 км. Какое расстояние проехал бы он за это же время на велосипеде, если бы его скорость была в 2,5 раза больше?
4. Автомобиль проехал расстояние между двумя пунктами за 2 ч. За какое время это же расстояние проедет автобус, если его скорость в 1,5 раза меньше?
5. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{3}{8} = \frac{a}{2,4}$.
6. Из 15 т руды получено 3 т меди. Сколько тонн меди получится из 20 т этой руды?
7. Распределите 3 тыс. рублей пропорционально числам 4, 3 и 8.

Проверьте себя (тест)

1. Площадь кольца S можно вычислить по формуле $S = \pi(R^2 - r^2)$. Найдите площадь кольца, если $R = 6$ см, $r = 4$ см ($\pi \approx 3,14$).
2. Клиент банка внёс x рублей на вклад, по которому вложенная сумма увеличивается на 5% за год, и y рублей на вклад, по которому начисляется 8% годовых. Через год его доход по двум вкладам составил C рублей. Какая формула выражает зависимость C от x и y ?
 - 1) $C = 0,13(x + y)$
 - 2) $C = 0,05x + 0,08y$
 - 3) $C = 0,5x + 0,8y$
 - 4) $C = 5x + 8y$
3. Из геометрической формулы $S = \frac{ah}{2}$ выразите переменную h .
4. Междугородний автобус проезжает 1 км по шоссе за 50 с. Найдите скорость автобуса в километрах в час.
5. Формула $P = pt$ связывает три величины: объём выполненной работы P , производительность p и время выполнения работы t . Какие из следующих утверждений являются верными?
 - А. Объём выполненной работы при постоянной производительности пропорционален времени работы.
 - Б. Время работы при постоянном её объёме пропорционально производительности.
 - В. Объём выполненной работы при постоянном времени работы пропорционален производительности.



- 6 Автомобиль, двигаясь с постоянной скоростью, за определённое время проехал $\frac{1}{3}$ всего расстояния до пункта назначения. Какую часть этого расстояния можно было бы проехать за это же время со скоростью, в 1,2 раза большей?
- 7 Для школы купили 6 одинаковых компьютеров. Сколько компьютеров, стоимость которых в 1,5 раза меньше, можно было бы купить на эту же сумму?
- 1) 4 2) 8 3) 9 4) для ответа не хватает данных
- 8 Из каких отношений нельзя составить пропорцию?
- 1) $2 : 7$ и $11 : 33$ 3) $0,1 : 7$ и $0,5 : 35$
 2) $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ и $2 : \frac{1}{2}$ 4) $0,02 : 0,1$ и $2 : 10$
- 9 Дана пропорция $5 : a = 6 : b$. Какое из следующих равенств пропорцией не является?
- 1) $a : b = 5 : 6$ 2) $b : a = 6 : 5$ 3) $a : b = 6 : 5$ 4) $a : 5 = b : 6$
- 10 Как можно найти неизвестный член пропорции $\frac{x}{1,2} = \frac{5}{8}$?
- 1) $x = \frac{8 \cdot 1,2}{5}$ 3) $x = \frac{8 \cdot 5}{1,2}$
 2) $x = \frac{1,2 \cdot 5}{8}$ 4) $x = \frac{8}{1,2 \cdot 5}$
- 11 Одна машинистка печатает страницу за 6 мин, а другая — за 10 мин. Первая за некоторое время напечатала 40 страниц. Сколько страниц за это же время напечатает вторая? Установите, какая пропорция соответствует условию задачи (x — число страниц, которое напечатает вторая машинистка).
- 1) $\frac{6}{10} = \frac{x}{40}$ 2) $\frac{6}{10} = \frac{40}{x}$ 3) $\frac{6}{40} = \frac{x}{10}$ 4) $\frac{6}{40} = \frac{10}{x}$
- 12 Отрезок AB , длина которого равна 21 см, точками C и D разделён на три части в отношении $2 : 3 : 5$. Чему равна длина отрезка CB ?



Введение в алгебру

Алгебра возникла и развивалась в недрах арифметики. Арифметика учит обращаться с числами и с числовыми (арифметическими) выражениями, алгебра – с буквами и буквенными (алгебраическими) выражениями. Буквы и другие знаки появились в математике не сразу, а в результате её длительного развития. Учёные древности алгебраические приёмы решения задач описывали словами, с помощью длинных предложений. Поэтому алгебру тех времён называют риторической или словесной. Переход от риторической алгебры к символической, в результате которого словесные правила были заменены формулами, а буквенные выражения сами стали предметом исчисления, происходил на протяжении нескольких веков. Решительный шаг в этом направлении был сделан только в конце XVI в. французским математиком Франсуа Виетом, который ввёл в алгебру современные символы. Это стало настоящим прорывом, и сегодня уже невозможно представить математику без букв, символов, формул.

3.1 Буквенная запись свойств действий над числами

1 Арифметика — наука о числах, основные её задачи связаны с вычислением значений числовых выражений. Но для того чтобы формулировать утверждения, которые составляют основу вычислительных приёмов, коротко и наглядно записывать свойства арифметических действий, нужны буквы.

С таким применением букв вы познакомились ещё в начальной школе, когда изучали *основные свойства сложения и умножения чисел*. Напомним их:

1. *Переместительное свойство сложения*, которое утверждает, что два числа можно складывать в любом порядке. В буквенном виде это свойство записывается так: для любых чисел a и b

$$a + b = b + a.$$

2. *Сочетательное свойство сложения*, согласно которому при сложении трёх чисел можно группировать как первые два слагаемых, так и последние два: для любых чисел a , b и c

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Так как расстановка скобок на результат не влияет, то эти суммы записывают также без скобок:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c.$$

3. *Переместительное свойство умножения*: для любых a и b
 $ab = ba.$

4. *Сочетательное свойство умножения*: для любых a , b и c
 $(ab)c = a(bc) = abc.$

5. *Распределительное свойство* — совместное свойство действий сложения и умножения: для любых a , b и c

$$a(b + c) = ab + ac.$$

2 Есть много других свойств арифметических действий, которыми вы пользуетесь при вычислениях. Попробуем некоторые из них сформулировать и записать с помощью букв. Для этого рассмотрим два примера устных вычислений и в каждом случае постараемся понять, с помощью каких действий мы получаем нужный результат.

Пример 1. Чтобы вычесть из числа 68 число 35, можно представить его в виде суммы чисел 30 и 5 и сначала отнять от 68 число 30, а затем от получившегося результата отнять число 5.

Запишем эти рассуждения с помощью цепочки равенств:

$$68 - 35 = \boxed{68 - (30 + 5) = 68 - 30 - 5} = 38 - 5 = 33.$$

Точно так же можно поступать и с другими числами:

$$97 - 51 = \boxed{97 - (50 + 1) = 97 - 50 - 1} = 47 - 1 = 46,$$

$$102 - 84 = \boxed{102 - (80 + 4) = 102 - 80 - 4} = 22 - 4 = 18.$$

Таким образом, независимо от того, какие конкретные числа берутся, мы пользуемся одним и тем же приёмом: чтобы вычесть из некоторого числа сумму двух чисел, вычитаем из него первое слагаемое и из полученного результата вычитаем второе слагаемое.

С помощью букв данный приём может быть описан следующим образом:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Это буквенное равенство говорит о том, что любую разность вида $a - (b + c)$ можно заменить выражением $a - b - c$, не содержащим скобки. Числовое значение от этого не изменится.

Пример 2. Чтобы разделить число 327 на 3, можно рассуждать так: 327 — это сумма чисел 300 и 27; разделим на 3 отдельно каждое слагаемое — получим 100 и 9; сложив эти числа, найдём искомое частное — число 109.

Запишем ход наших рассуждений:

$$327 : 3 = (300 + 27) : 3 = 300 : 3 + 27 : 3 = 100 + 9 = 109.$$

Приём, с помощью которого мы выполнили деление, состоит в следующем: чтобы разделить сумму двух чисел на некоторое число, отличное от 0, делим на это число отдельно каждое слагаемое и полученные частные складываем.

С помощью букв эти действия могут быть описаны так:

$$(a + b) : c = a : c + b : c,$$

где $c \neq 0$.

Если в качестве знака деления использовать черту дроби, то равенство примет такой вид:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Это буквенное равенство говорит о том, что любую дробь вида $\frac{a+b}{c}$ можно заменить суммой частных $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$; числовое значение останется тем же.

В таблице приведены ещё некоторые примеры приёмов вычислений и дана их буквенная запись.

Пример	Приём	Буквенная запись
$145 - 98 =$ $= 145 - (100 - 2) =$ $= (145 - 100) + 2 =$ $= 45 + 2 = 47$	Чтобы из числа вычесть разность, можно сначала вычесть из него уменьшаемое и затем к полученному результату прибавить вычитаемое	$a - (b - c) = a - b + c$
$1028 : 4 =$ $= 1028 : (2 \cdot 2) =$ $= (1028 : 2) : 2 =$ $= 514 : 2 = 257$	Чтобы разделить число на произведение двух чисел, можно сначала разделить это число на один множитель, а затем полученный результат разделить на другой множитель	$a : (bc) = (a : b) : c$

- Назовите и запишите в буквенном виде основные свойства сложения и умножения чисел.
- Какие вычислительные приёмы рассмотрены в примерах 1 и 2? Назовите их и запишите соответствующие равенства с помощью букв.
- Два вычислительных приёма записаны в буквенном виде:

$$a + (b - c) = a + b - c; \quad (a - b) \cdot c = ac - bc.$$

Назовите и сформулируйте каждый из них; приведите иллюстрирующие их числовые примеры.

А

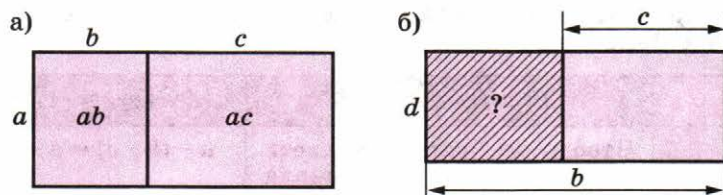
- 229** ■ РАССУЖДАЕМ ■ С помощью какого приёма удобно найти значение данного выражения? Запишите соответствующую цепочку числовых равенств, а потом опишите используемый приём с помощью букв:

а) $256 + 98$; б) $138 + 106$; в) $87 - 49$; г) $94 - 61$.

- 230** ■ РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ ■ Подберите соответствующее буквенное равенство из предыдущего упражнения и, используя его, запишите без скобок следующее выражение:

а) $x - (y - z)$; б) $y + (a - c)$; в) $m + (p + n)$; г) $r - (s + t)$.

- 231** Рассмотрите рисунок 3.1, а. Для вычисления площади прямоугольника, изображённого на этом рисунке, можно составить выражение $a(b + c)$ или выражение $ab + ac$. Числовое значение будет одно и то же: $a(b + c) = ab + ac$.



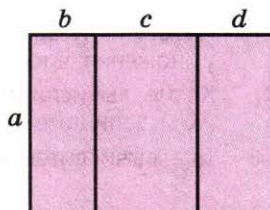
■ Рис. 3.1

Составьте два разных выражения для вычисления площади заштрихованной части прямоугольника на рисунке 3.1, б и запишите соответствующее равенство.

- 232** В магазине продаются орехи, расфасованные в пакеты по x граммов в каждом. Продали a пакетов с грецкими орехами, b пакетов с арахисом и c пакетов с фундуком. Составьте различные выражения для вычисления общей массы проданных орехов и запишите соответствующие равенства.

- 233** ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Ученик записал различные способы вычисления площади прямоугольника (рис. 3.2). Определите, какое из приведённых ниже равенств неверно.

- 1) $a(b + c + d) = ab + ac + ad$
- 2) $a(b + c + d) = a(b + c) + ad$
- 3) $ab + ac + ad = a(b + c) + a(c + d) - ac$
- 4) $ab + ac + ad = a(b + c) + a(c + d)$



■ Рис. 3.2

234 ■ РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ ■ Запишите с помощью букв свойство арифметического действия, которое зашифровано данными равенствами:

а) $6 \cdot 0 = 0,$
 $1,8 \cdot 0 = 0,$

$-7 \cdot 0 = 0;$

б) $-1 \cdot 36 = -36,$
 $0,5 \cdot (-1) = -0,5,$

$-3 \cdot (-1) = 3;$

в) $12 \cdot 1 = 12,$
 $1 \cdot (-8) = -8,$

$1 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7};$

г) $1,7 + 0 = 1,7,$
 $-6 + 0 = -6,$

$\frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$

235 Приведите три числовых примера, иллюстрирующих буквенное равенство:

а) $\frac{y}{y} = 1;$ б) $a + (-a) = 0;$ в) $-(-x) = x.$

236 Как можно устно умножить какое-нибудь число на 1,5? Запишите соответствующее правило с помощью букв.

Б

■ РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ (237–238) ■

237 Запишите с помощью букв правило, которое зашифровано данными равенствами:

а) $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{1+3}{7},$

$\frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{2+6}{11},$

$\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{3+9}{2};$

б) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3},$

$\frac{5}{12} - \frac{8}{12} = \frac{5-8}{12},$

$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3-1}{5};$

в) $\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{3},$

$\frac{5}{8} \cdot 13 = \frac{5 \cdot 13}{8},$

$\frac{4}{3} \cdot 12 = \frac{4 \cdot 12}{3};$

г) $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5},$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1},$

$\frac{11}{5} : \frac{2}{9} = \frac{11 \cdot 9}{5 \cdot 2}.$

238 Выполните действия с дробями, записанными в буквенном виде:

а) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c};$ в) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a};$ д) $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}\right) : \frac{a}{c};$

б) $\frac{m}{n} : \frac{a}{n};$ г) $\frac{a}{b} \cdot bc;$ е) $\left(\frac{m}{n} : \frac{m}{a}\right) : \frac{a}{b}.$

- 239** Смешанная дробь записана в виде суммы

$a + \frac{b}{c}$, где буквами a , b и c обозначены некоторые натуральные числа. Запишите с помощью букв правило обращения смешанной дроби в неправильную дробь.

- 240** Найдите площадь фигуры (рис. 3.3) сначала вычитанием площадей, а потом сложением площадей и запишите соответствующее равенство.

- 241** Составьте несколько различных выражений для вычисления площади прямоугольника (рис. 3.4) и запишите цепочку равенств.

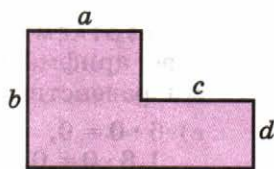


Рис. 3.3

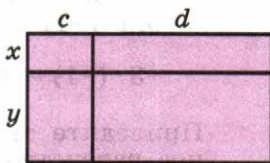


Рис. 3.4

■ РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ (242–244) ■

- 242** Запишите без скобок выражение

$$a - (b + c + d).$$

Если вам трудно сделать это сразу, то обратитесь к числовому примеру:

$$543 - 126 = 543 - (100 + 20 + 6) = \dots$$

Какое число в этом примере записано вместо буквы a ? вместо буквы b ? вместо буквы c ? вместо буквы d ?

- 243** Запишите с помощью букв приём, используя который можно разделить:

- сумму трёх чисел на некоторое число;
- сумму четырёх чисел на некоторое число.

- 244** Запишите с помощью букв и скобок несколько разных способов вычисления произведения четырёх чисел. Ответ запишите в виде цепочки равенств.

3.2 Преобразование буквенных выражений

- 1** При изучении предыдущего пункта вам приходилось записывать с помощью букв правила, по которым можно выполнять вычисления, например, правило вычитания из числа суммы двух чисел: для любых чисел a , b , c

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Это равенство показывает, что разность $a - (b + c)$ можно заменить выражением $a - b - c$, или, как говорят, *преобразовать* в выражение $a - b - c$; числовое значение при этом не изменится.

Там же были рассмотрены и другие примеры преобразования выражений. Так, дробь $\frac{a+b}{c}$ была преобразована в сумму $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, частное $a : (bc)$ — в выражение $(a : b) : c$.

Преобразовать буквенное выражение — это значит заменить его другим выражением, принимающим при любых допустимых значениях букв то же значение, что и исходное.

Исходное и преобразованное выражения соединяют знаком «=» и называют **тождественно равными** или просто **равными**.

2 Преобразования выражений выполняют на основе свойств действий над числами. Буквенные равенства, выражающие соответствующие свойства, мы теперь будем считать **законами алгебры**. Так, законами алгебры являются хорошо известные вам равенства

$$a + b = b + a, (a + b) + c = a + (b + c), \\ ab = ba, (ab)c = a(bc), a(b + c) = ab + ac.$$

Опираясь на законы алгебры, мы будем последовательно вводить *правила преобразования буквенных выражений*. Здесь будут рассмотрены правила преобразования сумм и произведений.

Из переместительного и сочетательного законов сложения следует правило:

в любой сумме слагаемые можно как угодно переставлять и произвольным образом объединять в группы.

Это правило можно применять для преобразования любых выражений — содержащих и буквы, и числа. Например, выражение $(a + b) + (c + d + 4)$ можно записать в виде $(a + d) + (b + c) + 4$.

С помощью указанного правила можно преобразовывать не только «чистые» суммы, но и смешанные выражения, составленные с помощью знаков «+» и «-». Рассмотрим, например, выражение

$$2a - x + 3y.$$

Так как вычитание всегда можно заменить сложением, то его можно считать суммой выражений $2a$, $-x$ и $3y$:

$$2a - x + 3y = 2a + (-x) + 3y.$$

Меняя каким-либо образом эти слагаемые местами, будем получать равные выражения. Например:

$$2a - x + 3y = 2a + 3y - x = 3y - x + 2a.$$

Такие выражения, как $2a - x + 3y$, в математике иногда называют **алгебраическими суммами** — суммами потому, что их всегда можно представить в виде суммы, а алгебраическими потому, что в исходной записи они все же «чистыми» суммами не являются.

В алгебраической сумме, как мы видели, слагаемые «путешествуют» вместе со своими знаками. Заметим, что в алгебраических суммах на первом месте принято записывать слагаемое со знаком «+» (если, конечно, такое имеется), причём этот знак перед первым слагаемым опускают. Например, алгебраическую сумму $-a - b + c$ заменяют более «красивым» выражением $c - a - b$.

В дальнейшем для краткости вместо слов «алгебраическая сумма» мы будем говорить просто «сумма».

Преобразование буквенного выражения часто выполняют с целью приведения его к более простому или к более «красивому» виду.

Пример 1. Упростим выражение $a + b + a - b$.

Данное выражение — сумма, состоящая из четырёх слагаемых: a , b , a и $-b$.

Поменяем местами слагаемые в этой сумме:

$$a + b + a - b = a + a + b + (-b).$$

Сгруппируем первые два и последние два слагаемых:

$$a + a + b + (-b) = (a + a) + (b + (-b)).$$

Ясно, что $a + a = 2a$. Кроме того, $b + (-b) = 0$ — это равенство является одним из законов алгебры. Значит,

$$(a + a) + (b + (-b)) = 2a + 0 = 2a.$$

На последнем шаге мы воспользовались ещё одним законом, согласно которому от прибавления нуля сумма не меняется.

Таким образом,

$$a + b + a - b = 2a.$$

Выполненные преобразования можно записать в виде цепочки:

$$a + b + a - b = a + a + b + (-b) = (a + a) + (b + (-b)) = 2a + 0 = 2a.$$

Мы привели здесь подробную запись, чтобы показать, как работают законы алгебры, а на практике промежуточные шаги часто выполняют устно — слагаемые переставляются и группируются не руками, а глазами. Например, можно было бы ограничиться такой цепочкой:

$$a + b + a - b = 2a + 0 = 2a.$$

3 Правило преобразования произведений следует из переместительного и сочетательного законов умножения.

В любом произведении множители можно как угодно переставлять и произвольным образом объединять в группы.

Пример 2. Упростим произведение $5y \cdot (-4x)$.

Сгруппируем отдельно числовые и буквенные множители и запишем вначале произведение числовых множителей, а затем буквенных, расположив их в алфавитном порядке:

$$5y \cdot (-4x) = 5 \cdot (-4) \cdot xy = (-20)xy.$$

Скобки, окружающие отрицательный множитель, записанный на первом месте, обычно опускают. Поэтому

$$5y \cdot (-4x) = -20xy.$$

Если выражение является произведением, в котором первый множитель — число, а остальные множители — буквы, то это число

называют *коэффициентом* этого произведения. Так, в выражении $-20xy$ числовой множитель -20 является коэффициентом.

Заметим, что коэффициент, равный 1, обычно не пишут: равенство $1 \cdot a = a$ является законом алгебры. А вместо коэффициента -1 просто ставят знак « $-$ ». Например, $(-1) \cdot ab = -ab$.

Пример 3. Упростим произведение $(-a)ca(-b)$.

На произведение буквенных множителей распространяется известное правило знаков «минус на минус даёт плюс»: $(-a)(-b) = ab$ — это закон алгебры. Поэтому

$$(-a)ca(-b) = +acab = acab.$$

Переставив множители и заменив произведение одинаковых множителей степенью, получим

$$acab = aabc = a^2bc.$$

- Сформулируйте правило преобразования суммы (фрагмент 2). Из каких законов оно следует?
- Пользуясь примером 1 как образцом, упростите сумму $m - n + m + n$. Запишите подробную цепочку преобразований и объясните каждый шаг.
- Сформулируйте правило преобразования произведения (фрагмент 3). Из каких законов оно следует?
- Пользуясь примером 2 как образцом, упростите произведение $2a \cdot (-3c)$. Запишите подробную цепочку преобразований и объясните каждый шаг.
- Чему равен коэффициент произведения $\frac{1}{3}abc$? $-0,2xy$? Как принято записывать произведение, у которого коэффициент равен 1? равен -1 ?
- Упростите выражение: $5a \cdot \frac{1}{2}b$; $6x \cdot \left(-\frac{1}{6}y\right)$.

А

РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ (245–249)

245 Назовите слагаемые алгебраической суммы:

- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| а) $a - b + c - d$; | г) $-2x - 3y - 10z + t$; |
| б) $-x - y - z - 10$; | д) $ab + ac - bc - 4$; |
| в) $3a - 5b + 6c - 2d - 1$; | е) $2xyz - 3xy + xz - y$. |

246 Составьте алгебраическую сумму из следующих слагаемых:

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| а) $-x, -y, a, -b$; | г) $-p, 12q, -2m, -3n, 5$; |
| б) $a, -b, -c, d$; | д) $2xy, -3xz, yz, -2$; |
| в) $2a, -2b, 4c, -3d$; | е) $-abc, -2ac, bc, 4ab$. |

247 Выражение $x + (-y) + (-2z)$ можно записать в виде алгебраической суммы, опустив знаки сложения перед скобками:

$$x + (-y) + (-2z) = x - y - 2z.$$

Воспользовавшись этим образцом, преобразуйте выражение:

- а) $5a + (-b) + (-3c)$; в) $-m + (-n) + p$;
б) $4x + y + (-6z)$; г) $-m + (-n) + (-p)$.

248 Замените выражение равным, не содержащим скобок:

- а) $a + (-b)$; д) $a - (-b) + (-c)$;
б) $a - (-b)$; е) $-x + (-y) + (-z) - d$;
в) $-c + (-a)$; ж) $a - c - (-b) - (-d)$;
г) $-x - (-y)$; з) $a - (-x) + (-y) - (-c)$.

Подсказка. Знак «-» перед скобкой означает вычитание; замените вычитание сложением.

249 Преобразуйте выражение в равное, изменив каким-либо способом порядок слагаемых:

- а) $a + b + c$; г) $7 + 2a - 5c$;
б) $-x + y - z$; д) $b - 3d + 10$;
в) $x - a - c + d$; е) $-5m + 3n - 1$.

250 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ В каком случае преобразование выражения $a - b + c - d$ выполнено неверно?

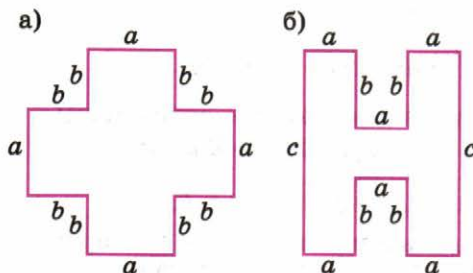
- 1) $a - b + c - d = a + c - b - d$ 3) $a - b + c - d = -b + a - d + c$
2) $a - b + c - d = a - d + c - b$ 4) $a - b + c - d = b - a - d + c$

251 Для каждого выражения из первой строки найдите равное ему выражение из второй строки.

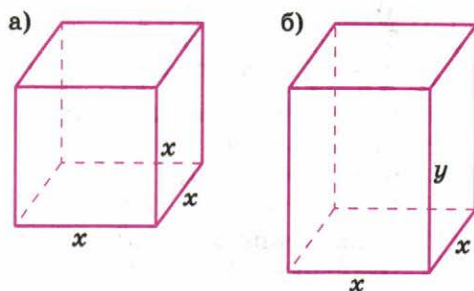
- А) $m + m + m$ Б) $m + m + m + m + m$ В) mtm Г) $mtmtm$
1) $m + 5$ 2) m^3 3) $5m$ 4) m^5 5) $m + 3$ 6) $3m$

252 Чему равен периметр фигуры, изображённой на рисунке 3.5, а, б?

253 Из проволоки нужно согнуть каркас прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.6, а, б). Составьте выражение для вычисления длины проволоки, которая для этого потребуется.



■ Рис. 3.5



■ Рис. 3.6

Упростите выражение (254–255).

- 254** а) $24 + m - 36$; г) $12 - b - 3$;
 б) $x - 10 - 2$; д) $-8 - 12 + c$;
 в) $a - 1 + 1$; е) $10 - y - 10$.
- 255** а) $b - a + b + a$; д) $x + x - 15 + 15$;
 б) $x - y - z + y$; е) $a - 1 + a - 1 + a - 1$;
 в) $c - 10 + 15 - c$; ж) $a - 3 + b + 3$;
 г) $x + y + x + x - y$; з) $m + m + 1 + m - 20$.

256 Упростите произведение и назовите коэффициент:

- а) $2x \cdot 3y$; д) $a \cdot (-3)d \cdot 4$;
 б) $2a \cdot 0,5b$; е) $-8p \cdot 0,125k$;
 в) $10a \cdot \frac{1}{2}b \cdot 3c$; ж) $-6z \cdot (-2x) \cdot y$;
 г) $m \cdot 0,1n \cdot 10$; з) $-a \cdot (-b) \cdot 4c$.

257 Упростите выражение:

- а) $-x \cdot (-y) \cdot (-z)$; в) $-a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d)$;
 б) $-m \cdot (-n) \cdot p$; г) $a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d)$.

258 Для каждого выражения из верхней строки выберите равное ему из нижней строки и запишите соответствующее равенство.

$a(-b)c$	$(-c)(-a)b$	$ad(-c)(-b)$	$(-a)(-b)(-c)d$
$abcd$	$-abcd$	abc	$-abc$

259 Упростите произведение:

- а) $3m \cdot 2m$; д) $(-z)xz(-y)$;
 б) $10a \cdot 0,2a$; е) $(-2a) \cdot (-5a)$;
 в) $3c \cdot 0,5x \cdot c$; ж) $-3m \cdot (-2n) \cdot m$;
 г) $x \cdot 5y \cdot x$; з) $4c \cdot (-2c) \cdot (-b) \cdot (-b)$.

260 Упростите выражение:

- а) $2ab \cdot 3ac$; в) $0,25cd \cdot \frac{1}{4}c$; д) $-\frac{2}{3}mnp \cdot (-\frac{1}{2}n)$;
 б) $5xy \cdot (-0,2xy)$; г) $8abc \cdot (-3ab)$; е) $0,1xyz \cdot 2xy$.

261 Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

- а) Всего в автопарке M машин, $\frac{5}{6}$ из них — автобусы, а $\frac{2}{3}$ из этих автобусов — микроавтобусы. Сколько в автопарке микроавтобусов?



б) В продаже было x велосипедов, 80% из них — двухколёсные, среди которых 20% — гоночные. Сколько было в продаже гоночных велосипедов?

- 262** Назовите общий множитель числителя и знаменателя дроби и сократите её:

а) $\frac{4xy}{5yz}$; в) $\frac{8ab}{12abc}$; д) $\frac{6mnk}{9knp}$; ж) $\frac{4a}{6a^2}$;
 б) $\frac{15km}{10nm}$; г) $\frac{7xyz}{21xz}$; е) $\frac{2x^2}{3x}$; з) $\frac{10c^3}{12c}$.

- 263** ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Ответьте на вопрос, воспользовавшись приведённым образцом:

а) Одну сторону прямоугольника увеличили в 2 раза, а другую — в 1,5 раза. Во сколько раз увеличилась площадь прямоугольника?

б) Длины рёбер прямоугольного параллелепипеда увеличили соответственно в 2, 3 и 4 раза. Во сколько раз увеличился его объём?

в) Длину ребра куба увеличили в 10 раз. Во сколько раз увеличился его объём?

Образец. Сторону квадрата увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличилась его площадь?

Обозначим сторону квадрата буквой a , тогда его площадь равна a^2 , а площадь нового квадрата равна $(3a)^2 = 3a \cdot 3a = 9a^2$.

Найдём отношение площадей квадратов: $\frac{9a^2}{a^2} = 9$. Таким образом, площадь увеличилась в 9 раз.

Б

■ РАССУЖДАЕМ (264–265) ■

- 264** Известно, что k — нечётное число. Чётным или нечётным является число: $k + k + k + k + k$; $k + k + k + k + 10$; $(k + k)(k + k + k)$?
- 265** Пусть a — чётное число, а b — нечётное. Чётным или нечётным является число: $a + a + a + b + b$; $a + a + b + b + b$?
- 266** Чему равна сумма 15 последовательных натуральных чисел, первое из которых равно n ?
- 267** В первом ряду амфитеатра a мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в амфитеатре, если он состоит: а) из 5 рядов; б) из 10 рядов?
- 268** Упростите произведение:

а) $6a(ab)^2b^3$; в) $a(-ac)^2$; д) $-z(-x^2)(-xz)$;
 б) $(xy)^2 \cdot (xy)^3$; г) $-c(cd)^2$; е) $ab^2(ab)^2$.

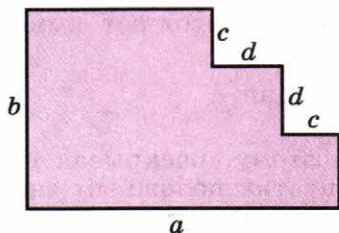
269 Подставьте в выражение ab вместо переменных a и b указанные выражения и выполните преобразования:

а) $a = 3xy$, $b = -2xy$; б) $a = -0,1x$, $b = 20xz$.

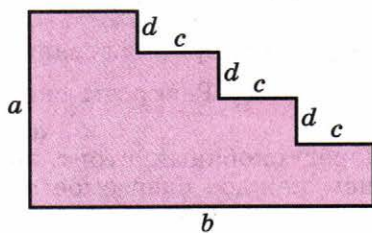
270 Подставьте в каждое из выражений $2x$, x^2 , x^3 вместо переменной x выражение $-y$ и упростите получившееся выражение.

271 Составьте формулу для вычисления площади S фигуры (рис. 3.7, а, б).

а)



б)



■ Рис. 3.7

3.3 Раскрытие скобок

1 Из буквенных выражений с помощью знаков действий и скобок составляют другие буквенные выражения. Возьмём, например, выражения $2a$ и $3x - y$. Тогда

$2a + (3x - y)$ — сумма выражений $2a$ и $3x - y$,

$2a - (3x - y)$ — разность выражений $2a$ и $3x - y$,

$2a(3x - y)$ — произведение выражений $2a$ и $3x - y$.

Эти выражения записаны с помощью скобок, но каждое из них можно заменить равным выражением без скобок. Такое преобразование выражений называют *раскрытием скобок*.

Раскроем скобки в сумме $2a + (3x - y)$. Здесь к слагаемому $2a$ прибавляется сумма выражений $3x$ и $-y$. Вспомните, что сочетательный закон сложения гласит: от изменения расстановки скобок в сумме её значение не меняется. Поэтому сумму принято записывать без скобок. Значит,

$$2a + (3x - y) = 2a + 3x - y.$$

Теперь раскроем скобки в разности $2a - (3x - y)$. Для этого заменим вычитание сложением, а затем воспользуемся законом, который выражается равенством $-a = -1 \cdot a$, и распределительным законом. Получим:

$$\begin{aligned} 2a - (3x - y) &= 2a + (-(3x - y)) = 2a + ((-1) \cdot (3x - y)) = \\ &= 2a + (-3x + y) = 2a - 3x + y. \end{aligned}$$

Таким образом, $2a - (3x - y) = 2a - 3x + y$.

Полученные результаты подсказывают нам следующие правила:

Чтобы к некоторому выражению прибавить алгебраическую сумму, надо прибавить к этому выражению отдельно каждое слагаемое этой суммы.

Чтобы из некоторого выражения вычесть алгебраическую сумму, надо прибавить к нему отдельно каждое слагаемое этой суммы, взяв его с противоположным знаком.

Эти правила называют *правилами раскрытия скобок*, *перед которыми стоит знак «+» или «-»*. Они позволяют выполнять рассмотренные преобразования короче.

Пример. Раскроем скобки в выражении

$$a - (a + b - c).$$

Перед скобками стоит знак «-». Поэтому, раскрывая скобки, запишем каждое слагаемое a , b и $-c$ с противоположным знаком:

$$a - (a + b - c) = a - a - b + c = 0 - b + c = c - b.$$

- 2** Раскрыть скобки в произведении $2a(3x - y)$ можно с помощью распределительного закона. Чтобы умножить $2a$ на сумму $3x$ и $-y$, нужно умножить $2a$ отдельно на каждое слагаемое этой суммы:

$$\begin{aligned} 2a(3x - y) &= 2a(3x + (-y)) = 2a \cdot 3x + 2a \cdot (-y) = 6ax + (-2ay) = \\ &= 6ax - 2ay. \end{aligned}$$

Такое преобразование обычно записывают короче, выполняя промежуточные шаги устно: $2a(3x - y) = 6ax - 2ay$.

Чтобы умножить некоторое выражение на алгебраическую сумму, нужно умножить это выражение отдельно на каждое слагаемое суммы и результаты сложить.

- Сформулируйте правила раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «+» и знак «-». Проиллюстрируйте их на примере выражений

$$3x + (2y - z) \quad \text{и} \quad 3x - (2y - z).$$

- На основании какого закона раскрывают скобки в произведении $3x(2y - z)$? Сформулируйте соответствующее правило и выполните преобразование.

A

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (272–273)

- 272** Раскройте скобки:

а) $a + (b - c + d)$;	д) $(a - b) + (c - d)$;
б) $a - (b - c - d)$;	е) $(x + y) - (z + t)$;
в) $a - (b + c + d)$;	ж) $(m - n) - (k - t)$;
г) $a + (b + c - d)$;	з) $(t + s) + (-p - m)$.

273 Какое из следующих равенств верно:

- 1) $a - (b + c - d) = a - b + c - d$;
- 2) $a - (b + c - d) = a - b - c - d$;
- 3) $a - (b + c - d) = a - b - c + d$?

274 Раскройте скобки и упростите получившееся выражение:

- а) $(x + y) + (y - x)$; д) $m - (n - p - m)$;
- б) $(a - b) - (a - b)$; е) $(a + b) - (b + c) - (a - c)$;
- в) $(c - d) - (c + d)$; ж) $(k + m) - (k - m) + (m - k)$;
- г) $(u + v) - (v - u)$; з) $(b + 1) - (a - 1) - (b - a)$.

275 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Восстановите сумму в скобках:

- а) $x - (...) = x - a + b - c$; б) $x - y = (x - a) + (...)$.

276 Запишите и упростите сумму:

- а) трёх последовательных натуральных чисел, начиная с числа n ;
- б) пяти последовательных натуральных чисел, начиная с n ;
- в) трёх последовательных натуральных чисел, среднее из которых равно n ;
- г) пяти последовательных натуральных чисел, среднее из которых равно n .

■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (277–279) ■

277 а) Чему равен периметр прямоугольника, одна сторона которого равна x см, а другая — на 2 см больше? на 3 см меньше?
 б) Чему равен периметр треугольника, одна сторона которого равна a см, вторая — на 1 см больше первой, а третья — на 2 см меньше второй?

278 а) На первой полке стоят x книг, на второй — на 3 книги больше, а на третьей — на 5 книг меньше, чем на первой. Сколько книг на трёх полках? Ответьте на вопрос при $x = 15$; $x = 23$.

б) В первом книжном шкафу a книг, во втором — на 15 книг меньше, а в третьем — на 40 книг больше, чем во втором. Сколько книг в трёх шкафах? Ответьте на вопрос при $a = 120$; $a = 95$.

279 а) Два велосипедиста едут навстречу друг другу из пунктов А и В. Первый до встречи проехал l км, а второй — на m км больше. Чему равно расстояние между А и В?

б) Расстояние между пунктами s км. Турист идёт из одного пункта в другой. Пройдя x км, что составило большую часть пути, он сделал остановку. Сколько километров ему осталось пройти? На сколько километров оставшееся расстояние меньше пройденного?

- 280** Составьте два выражения для вычисления площади фигуры (рис. 3.8, а, б) и покажите, как одно из этих выражений можно преобразовать в другое.

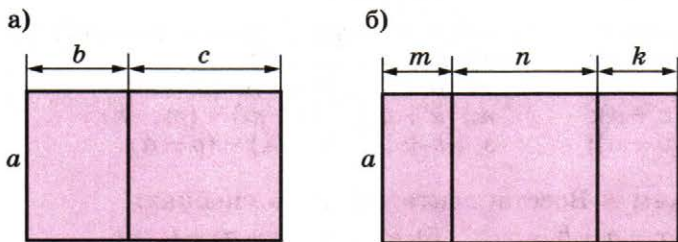


Рис. 3.8

- 281** Раскройте скобки в произведении:

а) $8(x + 3)$; в) $-9(a - 4)$; д) $12(a - b)$;
 б) $2(a - 1)$; г) $-7(b + 5)$; е) $-3(x - y)$.

- 282** Выполните умножение:

а) $a(b - x)$; в) $(b - a) \cdot (-2)$; д) $y(x - y - z)$;
 б) $x(x + y)$; г) $(10 - a) \cdot 4$; е) $(a - m + n) \cdot (-5)$.

- 283** Раскройте скобки в произведении:

а) $\frac{1}{4}(4x - 16)$; в) $(2x - 3y) \cdot (-3)$; д) $2x(a + 3b - c)$;
 б) $-\frac{1}{3}(3x + 12)$; г) $2m(m - n)$; е) $-c(x - 2y + 3z)$.

- 284** Упростите:

а) $c(a + 1) - c$; в) $m(1 + m) - (m - 1)$;
 б) $\frac{1}{4}(8b - 2) - 1$; г) $\frac{1}{3}(3k + 9) - k$.

Б

- 285** ■ РАССУЖДАЕМ ■ Расставьте скобки так, чтобы выражение в левой части равенства было равно выражению в правой части:

а) $x - x - x = x$; б) $x - y - y - x = 2x$.

- 286** Упростите выражение:

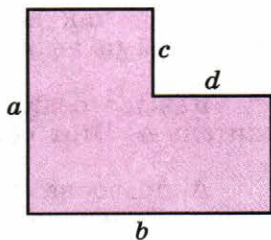
а) $(ab - 1) - (ab + 1) - (a - b)$;
 б) $(m - mn) - (n - mn) + (m + n)$.

- 287** а) В выражении $a + b + c$ выполните подстановку $a = x - y$, $b = y - z$, $c = x + z$ и упростите полученное выражение.
 б) В выражении $a - b - c$ выполните подстановку $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x - z$ и упростите полученное выражение.

288 Раскройте скобки:

- а) $a - (b - (c + 4))$; в) $a - (a - (a - 10))$;
 б) $x - (3 - (x + 6))$; г) $c - (c - (c - d))$.

289 Запишите выражения для вычисления площади фигуры (рис. 3.9) сначала сложением площадей прямоугольников, а затем вычитанием. Покажите, как можно получить второе выражение из первого с помощью преобразований.



■ Рис. 3.9

290 а) Покажите, что скорость лодки по течению реки больше скорости лодки против течения на удвоенную скорость течения.
 б) Покажите, что собственная скорость лодки равна половине суммы скорости движения лодки по течению реки и скорости её движения против течения.

291 Пусть сумма трёх последовательных натуральных чисел равна N . Найдите сумму трёх следующих натуральных чисел.

292 Пусть сумма трёх последовательных чётных чисел равна A . Найдите:

- а) сумму трёх следующих чётных чисел;
 б) сумму трёх следующих нечётных чисел.

293 ■ ИССЛЕДУЕМ ■ 1) Выясните, делится ли сумма:

- любых двух последовательных натуральных чисел на 2;
 любых трёх последовательных натуральных чисел на 3;
 любых четырёх последовательных натуральных чисел на 4;
 любых пяти последовательных натуральных чисел на 5;
 любых шести последовательных натуральных чисел на 6.

2) Установите закономерность и сформулируйте гипотезу о делимости суммы последовательных натуральных чисел на число слагаемых.

Подсказка. Каждый шаг в п. 1 сначала исследуйте на числовых примерах, а затем обоснуйте свой вывод с помощью букв. При этом вам придётся вспомнить свойства делимости суммы.

3.4 Приведение подобных слагаемых

1 Рассмотрим сумму $17 \cdot 3 + 17 \cdot 20 + 17 \cdot 9$.

Ясно, что она делится на 17, так как

$$17 \cdot 3 + 17 \cdot 20 + 17 \cdot 9 = 17 \cdot (3 + 20 + 9) = 17 \cdot 32.$$

Чтобы доказать наше утверждение, мы преобразовали сумму в произведение: вынесли за скобки число 17.

Точно так же можно преобразовывать и суммы, являющиеся буквенными выражениями, например сумму $ab + ac - ad$.

Каждое слагаемое в этой сумме содержит один и тот же множитель a . Этот общий множитель можно вынести за скобки:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d).$$

А право на такое преобразование нам даёт распределительный закон. Только в данном случае этот закон мы применяем справа налево: заменяем сумму произведением, а не наоборот.

На таком применении распределительного закона основан важный приём упрощения сумм, с которым мы познакомимся на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим сумму $2a + 4a + 5b - 10a$.

У слагаемых $2a$, $4a$ и $-10a$ одна и та же буквенная часть. Сгруппируем эти слагаемые:

$$2a + 4a + 5b - 10a = (2a + 4a - 10a) + 5b.$$

В сумме $2a + 4a - 10a$ вынесем за скобки общий множитель a : $(2a + 4a - 10a) + 5b = a \cdot (2 + 4 - 10) + 5b = a \cdot (-4) + 5b = -4a + 5b$. Таким образом,

$$2a + 4a + 5b - 10a = -4a + 5b.$$

Слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть, называют подобными слагаемыми.

Нам удалось упростить данное выражение, заменив сумму подобных слагаемых $2a + 4a - 10a$ одним выражением $-4a$. Такое преобразование называют *приведением подобных слагаемых*.

Чтобы привести подобные слагаемые, нужно:

- сгруппировать эти слагаемые;
- сложить их коэффициенты;
- умножить полученную сумму на их общую буквенную часть.

2 Рассмотрим на примере, как можно приводить подобные слагаемые, используя сформулированное правило.

Пример 2. Упростим сумму $3ab + 6c - 2ab + ab - c$.

В этой сумме две группы подобных слагаемых. У одних общей буквенной частью является произведение ab , у других — буква c . Сгруппируем подобные слагаемые:

$$3ab + 6c - 2ab + ab - c = (3ab - 2ab + ab) + (6c - c).$$

Найдём сумму коэффициентов подобных слагаемых первой группы: $3 - 2 + 1 = 2$. Значит, эту группу слагаемых надо заменить выражением $2ab$. Обратите внимание: коэффициент слагаемого ab равен 1, так как $ab = 1 \cdot ab$.

Теперь найдём сумму коэффициентов слагаемых второй группы: $6 - 1 = 5$. Значит, в результате приведения подобных слагаемых второй группы мы получим $5c$. Заметьте: коэффициент слагаемого $-c$ равен -1 , так как $-c = (-1) \cdot c$.

Таким образом,

$$3ab + 6c - 2ab + ab - c = 2ab + 5c.$$

Заметим, что подобные слагаемые можно группировать мысленно, выделяя их специальными знаками. Тогда решение записывается короче. В данном случае оно может быть, например, таким:

$$\underline{3ab} + \underline{6c} - \underline{2ab} + \underline{ab} - \underline{c} = 2ab + 5c.$$

- Какие слагаемые называют подобными? Подчеркните подобные слагаемые в каждом из выражений:

$$4x + 4 - x + 0,2x; \quad 2ab + 3ac - ab + 6a.$$

- На каком законе основано приведение подобных слагаемых?
- Проиллюстрируйте правило приведения подобных слагаемых на примере выражения $7c - 2,5 - 1,5c$.

А

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (294–295) Упростите выражение.

- 294** а) $5a + 4a$; в) $1,5a + a + 2,5a$; д) $7m + m$;
 б) $2x + 3x + 10$; г) $6y + 8 + 6y$; е) $\frac{3}{8}n + \frac{5}{8}n + \frac{1}{3}n$.
- 295** а) $18x - 3x + 5x$; г) $2a - 15 - a + 6$; ж) $-a - a - a - a$;
 б) $2y - 9y$; д) $t + 6,3t - 2,1t$; з) $-2n - 2n - 2n$;
 в) $1,2c - 0,3c + 5$; е) $5x - 5 + 3x - 4x$; и) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x$.

296 **ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО** В каком случае правильно приведены подобные слагаемые в выражении $5a + 2x + 9a - 2x - 7$?

- 1) $14a + 4x - 7$ 2) $14ax - 7$ 3) $7a$ 4) $14a - 7$

297 Решите уравнение:

- а) $2x + 3x = 150$; в) $-z - 3z = 4$; д) $m - 6m = 0$;
 б) $15a - 8a = 1,4$; г) $y - 4y = 1$; е) $7x + 3x = -5$.

298 Приведите подобные слагаемые:

- а) $7a + 9b + 3b - 5a - 6b + b$;
 б) $4xy + 7x - 5xy - 2x$;
 в) $12m^2 - 10 - 15m^2 + 4m^2$;
 г) $3y^2 - y + 4y^2 - 2y + 3y$;
 д) $abc - bc + 2abc + 3bc - 4abc$;
 е) $7x - z - 3x - 5z - 4x - 7z + 1$.

299 Упростите:

- а) $2ab - 3ba + 5a - a$; в) $xy - x + y - yx$;
 б) $abc + bca + cab$; г) $xyz - yzx - xzy - zxy$.

300 Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях букв:

- а) $3,7a - 2,5b - 7,5b + 0,3a + 10$ при $a = -1,5$, $b = 0,12$;
 б) $-1,6x + 0,2y + 2,6x - 0,1 - 3,2y$ при $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{2}{3}$.

301 Раскройте скобки и упростите выражение:

- а) $(2y + z) - (z - 2y)$; г) $(a + b) - (a - b) - (b - a)$;
 б) $(x + 3) - (5x - 7)$; д) $3m - (2m - 3) + (2 - m)$;
 в) $(2a - 1) + (3 - 4a)$; е) $(3y - 1) - (2y - 2) + (y - 3)$.

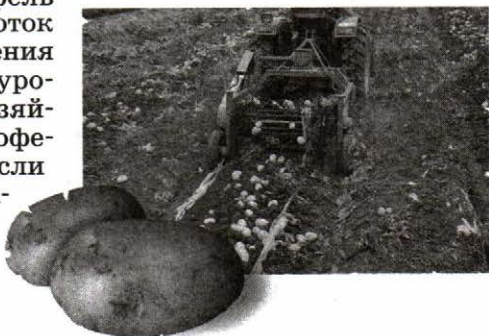
302 Упростите выражение:

- а) $2(a + b) + 3(a + b) + 2a$; д) $3(x - 1) + (x - 2) - x$;
 б) $5(x - z) - 2(x + z)$; е) $5n - 3(n + 2) + (n - 6)$;
 в) $2(2r - 3s) - 3(r - 2s)$; ж) $m - (2m - 6) + 3(m - 3)$;
 г) $6(2a + c) + 2(6a - c) - 4c$; з) $2(3x + 1) - (x - 2) - 3x$.

303 Упростите:

- а) $b(m - 7) - 7b$; г) $m(k - 3) - k(m - 5)$;
 б) $x(c + 1) + c(x - 1)$; д) $a(1 - b) - a(1 + b)$;
 в) $y(x - 4) + x(3 - y)$; е) $b(2d - 5) - b(d + 5)$.

304 Фермер занял под картофель 15 соток, а его соседи — 18 соток и 12 соток. Запишите выражения для определения будущего урожая картофеля в каждом хозяйстве и общего урожая картофеля во всех трёх хозяйствах, если в среднем с каждой сотки планируется собрать по M кг. Сколько примерно тонн картофеля всего будет собрано, если $M = 120$? $M = 200$?



305 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ 1) Сколько действий надо выполнить, чтобы вычислить значение выражения $ax + bx$?

Сколько действий надо выполнить, чтобы вычислить значение выражения $(a + b)x$?

Какое из этих двух выражений более удобно для вычислений с помощью калькулятора?

2) Вычислите с помощью калькулятора:

- $18,11 \cdot 1,45 - 3,35 \cdot 1,45$;
 $11,21 \cdot 2,25 + 17,5 \cdot 2,25 + 9,05 \cdot 2,25$;
 $10,8 \cdot 3,86 + 10,8 \cdot 4,57 - 10,8 \cdot 1,75$.

- 306** Составьте выражение по условию задачи и упростите его:
- а) На одной полке было n книг, на другой — в 3 раза больше, чем на первой, а на третьей — на 5 книг меньше, чем на второй. Сколько книг было на трёх полках вместе?
- б) В коробке на столе учителя лежат цветные карандаши. Из них m карандашей красные, синих на 7 меньше, а зелёных в 2 раза больше, чем синих. Сколько в коробке карандашей?

- 307** а) Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B . Скорость первого пешехода a км/ч, скорость второго — на 1 км/ч больше. Чему равно расстояние между A и B , если пешеходы встретились через 2 ч?
- б) Производительность одного принтера n страниц в минуту, а другого — на 4 страницы больше. Сколько страниц можно напечатать с помощью этих двух принтеров за 1 ч?

308 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■

1) Учитель показал учащимся арифметический фокус. Он сказал: «Задумайте какое-нибудь число, прибавьте к нему 5, сумму умножьте на 2, к произведению прибавьте 8 и вычтите из результата удвоенное задуманное число. Теперь я отгадаю, какое число у вас получилось. У вас получилось 18».

Покажем с помощью алгебраических преобразований, как учитель узнал результат.

Задумайте число:

Прибавьте к нему 5:

Умножьте сумму на 2:

Прибавьте 8:

Вычтите удвоенное задуманное число:

a

$a + 5$

$(a + 5) \cdot 2$

$(a + 5) \cdot 2 + 8$

$(a + 5) \cdot 2 + 8 - 2a$

Упростим полученное выражение:

$$(a + 5) \cdot 2 + 8 - 2a = 2a + 10 + 8 - 2a = 18.$$

2) Покажите сами с помощью алгебраических преобразований, на чём основан следующий фокус: «Задумайте число, прибавьте к нему 4, эту сумму умножьте на 3, из произведения вычтите утроенное задуманное число и к результату прибавьте 12. Вы получили число 24».

3) Придумайте свой арифметический фокус и покажите с помощью алгебры, на чём он основан.

Б

- 309** ■ РАССУЖДАЕМ ■ Учащиеся выполняли на доске упражнения на приведение подобных слагаемых и затем стёрли знаки между слагаемыми.

Восстановите запись:

$$7a \square 5b \square 3a \square b \square 4b \square 4a = 10b;$$

$$7a \square 5b \square 3a \square b \square 4b \square 4a = 6a.$$

310 Упростите выражение:

- а) $a(b+3) + b(a+3) - 3(a+b)$;
 б) $2(x-y) + 6(y-x) - (4x-4y)$;
 в) $a(b+c) - b(a+c) - c(a+b)$;
 г) $m(n-l) + n(l-m) + l(m-n)$.

311 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Расставьте скобки так, чтобы путём преобразования левой части равенства можно было получить правую часть:

- а) $2k - a - k - a = k$; в) $ab + 1 - ab + 1 = 0$;
 б) $2k - a - k - a = k - a$; г) $ab + 1 - ab + 1 = b + 1$.

312 Раскройте скобки:

- а) $4y - (3y - (2y + 1))$; в) $3m - (3m + (3m - (m + 3)))$;
 б) $a - (2x - (2a - x))$; г) $b - (2c - (3b + (4c - 5b)))$.

313 В январе за коммунальные услуги заплатили n р., в феврале тарифы повысились на 10%, а в марте — ещё на 20%. Сколько заплатили за коммунальные услуги за эти три месяца?

314 В центре городского района планировали разбить сквер прямоугольной формы размером $a \times b$ м. В процессе работ одну сторону увеличили на 50%, а другую уменьшили на 20%. Увеличилась или уменьшилась площадь сквера и на сколько процентов?



315 Автомобиль находился в пути 5 ч. Из этого времени t ч он ехал по просёлочной дороге, остальное время — по шоссе. Какой путь проехал автомобиль, если по шоссе он ехал со скоростью a км/ч, а по просёлку со скоростью, на 40 км/ч меньшей?

316 Лодка плыла некоторое время по течению реки и столько же времени против течения. Докажите, что для того, чтобы проплыть такое же расстояние в стоячей воде, потребуется такое же количество времени.

3.5 Ещё раз о законах алгебры

(Для тех, кому интересно)

Правила преобразования буквенных выражений, как вы знаете, основаны на законах алгебры. А сами законы, в свою очередь, основываются на здравом смысле, точнее, на смысле арифметических действий над реальными величинами.

Но, исходя из здравого смысла, можно сразу, не прибегая к арифметике, получать многие правила, например, известное вам правило приведения подобных слагаемых.

Рассмотрим равенство $3x - 2x + 4x = 5x$. Его можно истолковать, или, как ещё говорят, интерпретировать, так: если из имеющихся трёх одинаковых предметов убрать два, а потом добавить четыре, то в результате получится пять предметов. Примерно так при решении задач рассуждали математики ещё в Древней Греции.

Рассмотрим другие, более сложные примеры.

Пример 1. Почему равны выражения

$$x - (y + z + t) \text{ и } x - y - z - t?$$

Переведём этот вопрос на «язык денег»: у человека было x рублей, и он сделал три покупки стоимостью соответственно y , z и t рублей. Сколько у него осталось денег?

Подсчитать искомый остаток человек может двумя способами. Можно сначала найти общие затраты — они равны $y + z + t$ рублей, а затем найти остаток — он равен $x - (y + z + t)$ рублей.

А можно считать последовательно: после первой покупки у него осталось $x - y$ рублей, после второй $x - y - z$ рублей, после третьей $x - y - z - t$ рублей. Но полученные при этих способах подсчёта остатки — это одна и та же сумма. Значит,

$$x - (y + z + t) = x - y - z - t.$$

Пример 2. Как обосновать правило раскрытия скобок:

$$x - (y - z) = x - y + z?$$

Пусть человек, имеющий x рублей, хотел купить вещь стоимостью y рублей, но оказалось, что эта вещь стоит на z рублей дешевле. Тогда после покупки у него осталось $x - (y - z)$ рублей. С другой стороны, он предполагал, что у него останется $x - y$ рублей, но z рублей он сэкономил, так что на самом деле у него осталось $x - y + z$ рублей. Поэтому

$$x - (y - z) = x - y + z.$$

Разумеется, истолковать данное равенство можно не только на «языке денег». Например, здесь удобно воспользоваться и «языком расстояний».

Пусть туристу надо было пройти x км, и в первый день он намеревался пройти y км, но прошёл на z км меньше. Тогда после первого дня ему осталось пройти $x - (y - z)$ км. С другой стороны,

он рассчитывал, что ему останется пройти $x - y$ км, а реально осталось пройти на z км больше, т.е. всего осталось пройти $x - y + z$ км. Так что $x - (y - z) = x - y + z$.

Для равенств, связанных с умножением, часто удобна интерпретация на «языке площадей».

Пример 3. Покажем, что $(xy) : z = x(y : z)$.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами x и y (рис. 3.10). Разделим его сторону длиной y на z равных частей и разрежем данный прямоугольник. Тогда площадь каждого слоя будет равна $x(y : z)$ кв. ед. С другой стороны, всего имеется z слоёв равной площади, а их общая площадь равна xy , и поэтому площадь каждого слоя равна $(xy) : z$ кв. ед. Следовательно, $(xy) : z = x(y : z)$.

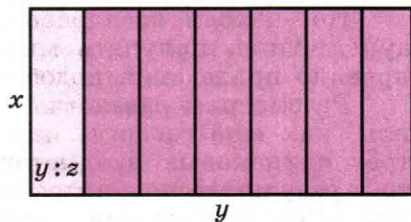


Рис. 3.10

317 Верно ли, что $(x - y)z = xz - yz$?

Дайте истолкование этого равенства на «языке площадей».

318 Предложите какую-нибудь интерпретацию равенства — на «языке денег» или на «языке расстояний»:

- а) $(x + z) - (y + z) = x - y$;
б) $x - (y - z + t) = x - y + z - t$.

319 Как можно истолковать на «языке объёмов» равенство $(xy)z = x(yz)$?

320 С помощью какого-либо «языка» дайте истолкование равенства $x : (yz) = (x : y) : z$.

321 Запишите равенство $x + (y - x) = y$, заменив знак «плюс» знаком умножения, а знак «минус» знаком деления — двоеточием или чертой дроби. Верно ли полученное равенство?

322 Запишите равенство $(xy) : (zt) = (x : z)(y : t)$, заменив знак деления знаком «минус», а знак умножения знаком «плюс». Верно ли полученное равенство?

Однако опоры на реальный смысл арифметических действий, вообще говоря, недостаточно. Ну хотя бы потому, что и на «языке денег», и на «языке расстояний», и на «языке площадей» мы всегда рассматриваем только положительные числа, а часто даже и натуральные.

С точки зрения математики алгебраические преобразования, которыми мы пользуемся, нуждаются в более строгом обосновании. И оказывается, ваших знаний вполне достаточно для проведения нужных доказательств. Надо только суметь воспользоваться этими знаниями.

Будем при доказательствах пользоваться переместительными законами сложения и умножения, сочетательными законами сложения и умножения, распределительным законом и некоторыми другими:

$$1. a + b = b + a.$$

$$2. (a + b) + c = a + (b + c).$$

$$3. a + 0 = a.$$

$$4. a + (-a) = 0.$$

$$5. ab = ba.$$

$$6. (ab)c = a(bc).$$

$$7. a \cdot 1 = a.$$

$$8. a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

$$9. a(b + c) = ab + ac.$$

Назовём их **основными законами алгебры**.

Нам также понадобятся известные вам определения разности и частного:

Разность чисел x и y — это такое число z , что $z + y = x$.

Частное от деления числа x на число y — это такое число z , что $z \cdot y = x$.

Пример 4. Мы постоянно пользуемся равенством

$$x - y = x + (-y).$$

Почему оно верно?

Исходя из определения разности, убедимся в том, что

$$(x + (-y)) + y = x.$$

Действительно, $(x + (-y)) + y = x + ((-y) + y) = x + 0 = x$.

Пример 5. Докажем равенство $(-x)y = -xy$.

Фактически перед нами стоит задача: доказать, что произведение $(-x)y$ есть число, противоположное xy , или, что то же самое, доказать, что $(-x)y + xy = 0$.

Воспользовавшись распределительным законом, получим:

$$(-x)y + xy = ((-x) + x)y = 0 \cdot y = 0.$$

Пример 6. Докажем, что $x + (y + (z + t)) = x + y + z + t$.

Этот пример может вызвать некоторое удивление, поскольку мы давно привыкли писать все суммы без скобок и разрешили это себе специальным правилом, вытекающим из сочетательного закона сложения.

В действительности, однако, мы должны доказать, что, преобразуя выражение по этому правилу, мы всегда будем получать верные равенства. А данный пример является одним из частных случаев для обоснования этого правила.

Вспомним сначала, что сумма $x + y + z + t$ — и вы привыкли к этому ещё в начальной школе — вычисляется слева направо, т. е. если восстановить в этой сумме скобки, то получится равенство

$$x + y + z + t = ((x + y) + z) + t.$$

Поэтому мы должны доказать:

$$x + (y + (z + t)) = ((x + y) + z) + t.$$

И сейчас мы увидим, что это равенство действительно следует из сочетательного закона сложения:

$$x + (y + (z + t)) = (x + y) + (z + t) = ((x + y) + z) + t,$$

что и требовалось доказать.

Мы дважды воспользовались сочетательным законом: в первый раз мы применили его для чисел x , y и $z + t$, а во второй раз — для чисел $x + y$, z и t .

323 Как известно, перемножить непосредственно можно только два числа. Поэтому для вычисления произведения xyz (без изменения порядка множителей) в нём надо — хотя бы мысленно — поставить скобки, т.е. представить его как $(xy)z$ или как $x(yz)$. Итак, в выражении xyz можно поставить скобки двумя способами. А сколькими способами можно поставить скобки в выражении $xyzt$? Докажите, что при этом каждый раз будут получаться равные выражения.

324 В выражениях $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ и $2 : 3 : 4 : 5$ поставьте скобки всеми возможными способами и вычислите значения полученных выражений. Сделайте вывод.

325 Докажите, что $x + (y + (z + (t + u))) = x + y + z + t + u$.

Дополнительные задания

● Раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых

326 Составьте сумму и разность выражений $m + 0,1n$ и $2(m - 0,3n)$ и упростите их.

327 Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 5(x + 1,4y) - 0,8(2x + y); & \text{в) } -a + 0,5(3a + 0,2b) - (a + 0,1b); \\ \text{б) } \frac{2}{3}(x - y + z) - (\frac{2}{3}x - y + z); & \text{г) } -10(\frac{2}{5}b + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}(8 - b) + 5b. \end{array}$$

328 Найдите значение выражения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 3k + 0,5(1 - 6k) - (7 - 6k) \text{ при } k = 0,05; & k = -1,2; \\ \text{б) } x(y - 1) - y(x + 1) \text{ при } x = 1, & y = -\frac{2}{3}; \quad x = -\frac{1}{5}, \quad y = -0,6; \\ \text{в) } c(b + c) - b(a - c) + c(b - c) + ab \text{ при } & b = 0,3, \quad c = -\frac{1}{9}; \quad b = -0,25, \\ & c = -\frac{2}{15}. \end{array}$$

■ ДОКАЗЫВАЕМ (329—332) ■

329 Докажите, что число:

- а) записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37;
- б) записанное четырьмя одинаковыми цифрами, делится на 11 и на 101.

Подсказка. Представьте число в виде суммы разрядных слагаемых. Например, число, записанное двумя одинаковыми цифрами, можно представить в виде $10a + a$.

330 В последовательности Фибоначчи каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

- а) Обозначьте одно из чисел этой последовательности буквой a , следующее за ним — буквой b и запишите в виде буквенного выражения каждое из четырёх следующих чисел.
- б) Докажите, что сумма любых шести последовательных чисел в последовательности Фибоначчи делится на 4.
- в) Докажите, что сумма любых восьми последовательных чисел в последовательности Фибоначчи делится на 3.

331 Докажите равенство:

- а) $p(k + p) - 2k(p - 1) - p^2 = 2k - 2p$;
- б) $a(b + 1) - c(a + b) + b(c + 1) - (a + b) = ab - ac$.

332 Докажите, что если равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ — пропорция, то $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

и $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ также являются пропорциями. Используя доказанное утверждение, составьте две новые пропорции из пропорции $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

Запишите выражение по условию задачи и упростите его (333—335).

333 Автобус прошёл расстояние между городами, равное 200 км, за 5 ч. За первый час пути он прошёл x км, за второй — на 20 км меньше, а за третий — путь, в 1,5 раза больший, чем за предыдущий час. Сколько километров прошёл автобус в оставшееся время?

334 Провод разрезали на четыре части так, что длина первой части, равная x м, в 3 раза меньше второй, на 1,5 м меньше третьей и в 2 раза больше четвёртой. Какова длина всего провода?

335 В коробке n пуговиц. Их количество удвоили, а затем из коробки вынули дюжину пуговиц. Остаток пуговиц снова удвоили, а затем вновь вынули дюжину пуговиц. Эту операцию проделали и в третий раз. Сколько пуговиц стало в коробке?

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Назовите и запишите с помощью букв основные свойства сложения и умножения чисел.
- 2 На основании каких законов можно утверждать, что выполняется равенство:

а) $-2a - c + 3y = 3y - 2a - c$;

б) $2a \cdot (-3c) = -6ac$;

в) $5(x - y) = 5x - 5y$?

- 3 Чему равен коэффициент в каждом из произведений:

$$-7ab; \frac{2}{3}x^2; mn; -xyz?$$

- 4 Сформулируйте правила раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «+» или «-». Покажите их применение на примерах.
- 5 Сформулируйте правило раскрытия скобок в произведении. Покажите его применение для раскрытия скобок на примере произведения $x(2a - b + c)$.
- 6 Какие слагаемые называют подобными? Сформулируйте правило приведения подобных слагаемых и поясните его на примере выражения $5a - 4a + a - 6$.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- 1 Упростите выражение:
а) $y \cdot (-2a) \cdot (-3b)$; б) $2xy \cdot 7xz$; в) $5ab \cdot (-0,2b)$.
- 2 Приведите подобные слагаемые:
а) $3x - x + 7x - 3x$; б) $2b - a + 4b - 7a + 7$.
- 3 Составьте выражение по условию задачи:
а) В одном ведре x л воды, в другом — на 3 л больше, а в третьем — на 4 л меньше, чем в первом. Сколько литров воды в трёх ведрах?
б) Одна сторона прямоугольника l см, а другая — на m см больше. Чему равен периметр прямоугольника?
- 4 Найдите значение выражения $2a + 3 - 1,5a + 0,5$ при $a = -3$; 0; 4.
- 5 Упростите выражение:
а) $4a + (a + b) - (2a + 3b)$; б) $2(x + 3y) - 3(3x - y)$.

Проверьте себя (тест)

- 1 Какое из следующих равенств выражает правило вычитания из числа суммы двух чисел?

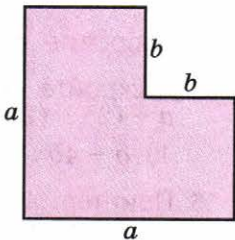
1) $a + (b - c) = a + b - c$ 3) $a - (b + c) = a - b - c$
 2) $a - (b - c) = a - b + c$ 4) $(a + b) - c = a + b - c$

- 2 Из приведённых выражений:

А) $a^2 - b^2$ Б) $a^2 + b^2$ В) $a(a - b) + b(a - b)$

выберите те, с помощью которых можно найти площадь фигуры, изображённой на рисунке.

1) А и Б 2) А и В 3) Б и В 4) А, Б и В



- 3 Какому из выражений равно выражение

$$a + a + a + a + a + a + a$$

1) $6a$ 2) a^6 3) $a + 6$ 4) 6

- 4 Запишите без скобок алгебраическую сумму $2m - (-p) + (-12q)$.

- 5 Каждое выражение из верхней строки соотнесите с равными ему выражениями из нижней строки.

А) $a - b - c$ Б) $a - b + c$

1) $c - b + a$ 2) $-c - b + a$ 3) $-b + a - c$ 4) $-b + a + c$

- 6 Какое из следующих равенств неверно?

1) $(-a)(-b)(-c) = -abc$ 3) $a(-b)(-c) = abc$

2) $(-a)(-b)c = abc$ 4) $(-a)b(-c) = -abc$

- 7 Упростите выражение $-3xy \cdot (-2xz)$.

- 8 Туристы проехали на автобусе n км, на поезде в 3 раза больше и прошли пешком $\frac{1}{6}$ того расстояния, которое они проехали на поезде. Сколько километров туристы прошли пешком?

- 9 Упростите выражение $(m + m + m)(n + n + n)$.

1) $6mn$ 2) $9mn$ 3) m^3n^3 4) $3(m + n)$

- 10 Пусть x — отрицательное число. Какие из чисел:

1) $x + x + x$ 2) $x(x + x + x)$ 3) $xxx + x$ 4) xxx

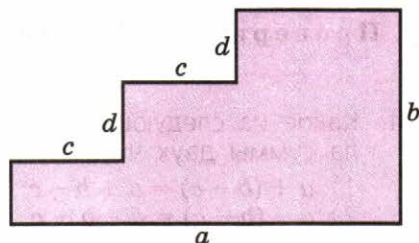
являются отрицательными?

- 11 Укажите выражение, равное выражению $(a - b) - (b - c)$.

1) $a + c$ 2) $a - c$ 3) $a - 2b + c$ 4) $a - 2b - c$

- 12 Какое из выражений можно использовать для вычисления площади фигуры, изображённой на рисунке?

1) $ab - cd$ 3) $ab - 3cd$
 2) $ab - 2cd$ 4) $ab - 2c \cdot 2d$



- 13 Приведите подобные слагаемые:
 $xy + 3yz - 2xy - yz$.

- 14 Упростите выражение $2(2a - 1) - 3(a + 1) + 1$.

- 15 Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в выражении
 $a - (2b - (2a - 2(b + a)))$.

1) $a - 4b$ 2) a 3) $-3a - 4b$ 4) $a + 4b$

- 16 Принтер A печатает со скоростью n страниц в минуту. Скорость принтера B в 2 раза больше скорости принтера A , а скорость принтера C в 1,5 раза больше скорости принтера B . На каждом из них надо распечатать по 50 страниц научного отчёта. Принтеры включили одновременно. Через 3 мин после включения работа была ещё не закончена. Сколько всего страниц отчёта осталось распечатать к этому моменту?

Уравнения

Вы уже решали немало задач с помощью рассуждений и, конечно, поняли, что к каждой задаче надо подбирать свой особый ключик. Алгебра предлагает вам новые возможности. Великий математик Анри Пуанкаре сказал, что «математика – это искусство давать различным вещам одно и то же название». В этом шутовском афоризме заключён глубокий смысл. Переводя условия задач на язык математики, решая задачи алгебраическим способом, с помощью уравнений, вы увидите, как один и тот же приём позволяет решать самые разные, внешне совсем не похожие одна на другую задачи. А это особенно важно в наш компьютерный век, когда использование схожих алгоритмов при решении различных задач стало повсеместным.

4.1 Алгебраический способ решения задач

Когда задачу решают *алгебраическим способом*, то прежде всего условие задачи переводят на язык математики. Основа такого перевода, его первый шаг — введение буквы для обозначения какой-либо неизвестной величины. В результате перевода обычно получается равенство, содержащее букву. Это равенство, как вы уже знаете, называют **уравнением**.

Решим с помощью составления уравнения такую задачу:

В семье две пары близнецов, родившихся с разницей в три года. В 2012 г. всем вместе исполнилось 50 лет. Сколько лет было каждому из близнецов в 2010 г.?

Обозначим через x возраст младших близнецов в 2010 г. Тогда старшим близнецам в этом году было по $x + 3$ года. В 2012 г., т. е. через 2 года, младшим близнецам было по $x + 2$ года, а старшим — по $x + 5$ лет.

По условию задачи суммарный возраст близнецов в 2012 г. составил 50 лет. Значит,

$$(x + 2) + (x + 2) + (x + 5) + (x + 5) = 50.$$

Таким образом, уравнение составлено. Теперь, чтобы найти неизвестное число x , это уравнение надо *решить*.

Сначала упростим его левую часть:

$$\begin{aligned} & (x + 2) + (x + 2) + (x + 5) + (x + 5) = \\ & = x + 2 + x + 2 + x + 5 + x + 5 = 4x + 14. \end{aligned}$$

Мы получили более простое уравнение

$$4x + 14 = 50.$$

Найдём из этого уравнения слагаемое $4x$:

$$4x = 50 - 14,$$

$$4x = 36.$$

Теперь остаётся найти неизвестный множитель x :

$$x = 36 : 4,$$

$$x = 9.$$

Итак, мы нашли неизвестное число, которое обозначили буквой x . Однако это ещё не ответ задачи. Буквой x был обозначен возраст младшей пары близнецов: значит, им в 2010 г. было по 9 лет. Но ещё нужно найти возраст старшей пары близнецов. Так как старшим близнецам на 3 года больше, то им было по 12 лет.

Попробуйте решить эту же задачу арифметически. Вы сможете убедиться, что это не так уж и просто и что алгебраический способ, безусловно, легче.

А как и когда этот способ зародился? Известно, что впервые применил букву для обозначения неизвестной величины Диофант Александрийский — древнегреческий математик, живший в III в. Это был очень важный шаг в создании символического языка математики. Но только в XVII—XVIII вв. использование буквы для обозначения неизвестных стало общепринятым.

- С чего начинают составление уравнения по условию задачи?
- Разберите решение задачи в тексте данного пункта и ответьте на вопросы:
 - а) Какая величина обозначена буквой x ?
 - б) Какое выражение означает возраст старших близнецов в 2010 г.? Какое выражение означает возраст, которого достигли в 2012 г. младшие близнецы? старшие близнецы?
 - в) Запишите выражение, означающее суммарный возраст близнецов в 2012 г. Чему равна записанная сумма?
 - г) Что в соответствии с условием задачи означает найденное значение x , равное 9? Выполните проверку, вычислив возраст близнецов в 2012 г. и убедившись в том, что всем вместе им 50 лет.

А

Составьте разные уравнения по условию задачи, обозначая буквой различные величины (336—337).

- 336** а) В двух вагонах поезда 86 человек, причём в первом на 14 человек меньше, чем во втором. Сколько человек в каждом вагоне?
- б) В двух классах 60 человек. Сколько среди них мальчиков и сколько девочек, если девочек на 6 больше, чем мальчиков?

337 а) В двух пачках вместе 350 листов бумаги. Сколько листов бумаги в каждой пачке, если известно, что в одной из них листов в 4 раза больше, чем в другой?

б) В июле число отдыхающих в пансионате возросло по сравнению с июнем в 2,5 раза. Сколько отдыхающих было в июне и сколько в июле, если всего в эти два месяца отдохнуло 4550 человек?

■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО (338—339) ■

338 В три ящика разложили 23 кг слив. Во втором ящике слив в 1,5 раза больше, чем в первом, а в третьем — на 2 кг больше, чем в первом. Сколько слив в каждом ящике?

Выберите равенство, которое является переводом условия этой задачи на математический язык. (Буквой x обозначена масса слив в первом ящике.)

1) $x + 1,5x + 2x = 23$

2) $x + (x + 1,5) + (x + 2) = 23$

3) $x + 1,5x + (x + 2) = 23$

339 На трёх книжных полках 47 книг. На верхней полке на 8 книг меньше, чем на средней, а на нижней — в 3 раза больше, чем на средней. Сколько книг на каждой полке?

Выберите равенство, которое является переводом условия этой задачи на математический язык. (Буквой x обозначено количество книг на средней полке.)

1) $(x + 8) + x + 3x = 47$

2) $(x - 8) + x + 3x = 47$

3) $(x - 8) + x + (x + 3) = 47$



340 Придумайте задачу, переводом которой на язык математики является уравнение:

а) $x + (x - 3) = 33$;

в) $x + 3x = 160$;

б) $x + (x + 3) + (x + 6) = 30$;

г) $x + 2x + 3x = 60$.

■ РЕШАЕМ ЗАДАЧУ ПО ПЛАНУ (341—342) ■

341 Составьте уравнение по условию задачи, опираясь на приведённый ниже план.

На одной овощной базе 500 т картофеля, а на другой 700 т. Ежедневно с первой базы отправляют в овощные магазины 20 ц картофеля, а со второй — 30 ц. Через сколько дней картофеля на овощных базах окажется поровну?

- Выразите данные величины в одних и тех же единицах.
- Обозначьте искомое количество дней буквой x .
- Запишите выражения, показывающие:
 - 1) сколько картофеля отправлено с первой овощной базы за x дней;
 - 2) сколько картофеля отправлено со второй овощной базы за x дней;
 - 3) сколько картофеля осталось на первой овощной базе через x дней;
 - 4) сколько картофеля осталось на второй овощной базе через x дней.
- Запишите уравнение.

342 Составьте уравнение по условию задачи. (Действуйте по плану, аналогичному плану задачи 341.)

В одной машине 3 т яблок, а в другой — 5 т яблок. Из первой машины выгрузили несколько ящиков по 15 кг в каждом, а из второй — в 2 раза больше ящиков по 20 кг в каждом. После этого в первой машине осталось столько же яблок, сколько во второй. Сколько ящиков выгрузили из каждой машины?

Б

343 Составьте разные уравнения по условию задачи:

- а) Пётр заметил, что в этом году он младше отца в 3 раза, отец младше деда в 2 раза, а сумма его возраста, возраста отца и возраста деда составляет 110 лет. Сколько лет каждому?
- б) Брат старше сестры на 4 года. Отец сказал сыну: «Мне 30 лет. Если через 2 года я сложу твой возраст и возраст твоей сестры, то результат будет меньше моего возраста в 2 раза». Определите, сколько лет брату и сестре сейчас и сколько будет каждому из них через 2 года.

344 Широко известна старинная задача о фазанах и кроликах: «В клетке находятся фазаны и кролики. Известно, что у них 35 голов и 94 ноги. Узнайте число фазанов и число кроликов». Составьте разные уравнения по условию задачи, обозначив буквой:

- а) число фазанов;
- б) число кроликов;
- в) число ног у фазанов;
- г) число ног у кроликов.

345 Запишите условие задачи



на языке уравнений:

а) К задуманному числу прибавили 11, затем сумму поделили пополам и получили число, которое на 2 больше задуманного. Какое число было задумано?

б) Из задуманного числа вычли 5, затем разность поделили на 5 и получили число, в 5 раз меньшее, чем получили бы, прибавив 5 к трети задуманного числа. Какое число было задумано?

346 Восстановите условие задачи «на задуманное число» по следующему уравнению (буквой обозначено задуманное число):

а) $8(x - 1) = 6x$; б) $(4y - 7) : 3 - 1 = y$.

347 (Старинная задача.) Некто сказал другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай ты мне только 10, и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько денег было у каждого? Составьте уравнение по условию задачи.

4.2 Корни уравнения

Изучая предыдущий пункт, вы составляли уравнения по условиям задач. Однако уравнения в математике рассматривают не только в связи с текстовыми задачами.

Всякое равенство, содержащее переменную, можно рассматривать как уравнение. Например, равенства

$$x^2 + 4x = 3, \quad 3(2 - y) - 8 = 7 + 2y, \quad 1 - a^3 = 7$$

это уравнения.

Напротив, числовые равенства $2 + 2 = 4$, $5 \cdot 7 = 35$ уравнениями не являются — в них нет переменной. И выражения $x^2 + 5x + 7$, $5(3 - 2c) - 5c$ тоже, конечно, уравнениями не являются, потому что они не являются равенствами.

Таким образом, уравнения характеризуются двумя очевидными свойствами, легко определяемыми на глаз: во-первых, уравнение — это равенство; во-вторых, в этом равенстве имеется буква — в одной из его частей или в обеих.

Если в уравнение вместо переменной подставить число, то получится числовое равенство. Числовое равенство, как известно, может быть верным или неверным. Решение уравнения — это поиск тех значений переменной, при которых получается верное равенство. Такие значения переменной, как вы знаете, называют **корнями уравнения**.

Определение

Корнем уравнения называется число, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.

Русское слово «корень» в данном случае — это яркий пример метафоры в математическом языке: вспомните, как при решении текстовой задачи алгебраическим способом уравнение как бы вырастает из неизвестного числа x .

Уравнение $(x+2) + (x+2) + (x+5) + (x+5) = 50$, которое мы решали в предыдущем пункте, имеет только один корень — число 9.

Но уравнение может иметь и более одного корня. Например, у уравнения $x^2 = 9$ два корня — это числа -3 и 3 .

Вообще уравнение может иметь сколько угодно корней, их даже может быть бесконечно много. Например, корнем уравнения $2(x+3) = 2x+6$, в обеих частях которого стоят равные выражения, является любое число. Действительно, какое бы число мы ни подставили в это уравнение вместо переменной x , получится верное числовое равенство.

А вот уравнение $x+1 = x+3$ вообще не имеет корней, так как при любом значении x левая часть уравнения на 2 меньше его правой части.

Учитывая сказанное, мы можем уточнить смысл слов «решить уравнение»:

решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней у него нет.

Можно сказать и так:

решить уравнение — значит найти множество его корней. (Вспомните, что множество может быть и пустым.)

Что называется корнем уравнения? Определите, является ли число -2 корнем данного уравнения; обоснуйте ответ:

а) $x^2 + x + 2 = 0$; б) $x^4 + 4 = 20$; в) $(x-5)(x+2) = 0$; г) $|x| + 3 = 1$.

Прочитайте два предложения, разъясняющие смысл слов «решить уравнение». Объясните, почему они означают одно и то же.

А

ДЕЙСТВУЕМ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ (348–350)

348 Докажите, что:

а) число 4 является корнем уравнения $2x - 7 = 5 - x$;

б) число -3 является корнем уравнения $x(x+5) = -6$;

в) число 4 является корнем уравнения $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 1$;

г) число -2 является корнем уравнения $x - 2(5x-1) = -10x$.

349 Является ли корнем уравнения $2x^2 - 5x - 3 = 0$ число:

а) 3; б) -4 ; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$?

350 Какие из чисел 1, 2, 0, -1, -2 являются корнями уравнения:

- а) $x^3 + 6x^2 + 5x - 6 = 0$; в) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$;
 б) $x^3 - x^2 - 6x = 0$; г) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$?

351 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Решите уравнение:

- а) $x^2 = 9$; б) $x^2 = 0$; в) $|x| = 5$; г) $|x| = 0$.

Б

■ РАССУЖДАЕМ (352–353) ■

352 Докажите, что:

- а) корнем уравнения $3x - 6 = 3(x - 2)$ является любое число;
 б) уравнение $3y - 5 = 1 + 3y$ не имеет корней.

353 Объясните, почему уравнение не имеет корней:

- а) $x^2 = -1$; б) $|x| = -5$; в) $x^6 + 1 = 0$; г) $|x| + 10 = 0$.

■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (354–355) ■

354 Проверьте, что число 10 является корнем уравнения $|x| = x$, а число -10 его корнем не является. Укажите ещё несколько корней этого уравнения. Что представляет собой множество корней уравнения $|x| = x$?

355 Укажите множество корней уравнения $|x| = -x$.

4.3 Решение уравнений

■ Чтобы решить уравнение, мы будем преобразовывать его в другое уравнение более простого вида, которое имеет то же множество корней, что и исходное.

Правила преобразования уравнений являются следствиями очевидных свойств числовых равенств:

Если $a = b$, то
 $a + c = b + c$ и $a - c = b - c$

Числовое равенство не нарушится, если к обеим его частям прибавить (от обеих его частей отнять) одно и то же число

Если $a = b$, то
 $ac = bc$ и $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ($c \neq 0$)

Числовое равенство не нарушится, если обе его части умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля

Рассмотрим два основных правила преобразования уравнений на примере решения уравнения $2x = 10 - 3x$.

Множество корней этого уравнения не изменится, если его заменить уравнением $2x + 3x = 10 - 3x + 3x$, которое получается путём прибавления к обеим частям исходного уравнения выражения $3x$.

Заменив нулём сумму выражений $-3x$ и $3x$, получим уравнение $2x + 3x = 10$.

Сравните получившееся уравнение и исходное. В результате проведённого преобразования слагаемое $-3x$ оказалось в другой части уравнения, при этом его знак изменился с «минуса» на «плюс». Отсюда понятно правило:

в уравнении можно перенести слагаемое из одной части в другую, изменив при этом его знак на противоположный.

Продолжим решение уравнения $2x + 3x = 10$. Упростим его левую часть. Получим уравнение $5x = 10$.

Из свойств числовых равенств следует ещё одно правило преобразования уравнений:

обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

При этом множество корней уравнения не изменится. Разделив обе части уравнения $5x = 10$ на 5, получим: $x = 2$. Таким образом, уравнение $2x = 10 - 3x$ имеет корень, равный 2.

Заметим, что первым приём преобразования уравнений описал знаменитый арабский математик Мухаммед аль-Хорезми, живший в Хорезме и в Багдаде на рубеже IX и X вв. Одно из главных сочинений аль-Хорезми называлось «Китаб аль-джебр вальмукабала», что в переводе с арабского означает «Книга о восстановлении и противопоставлении». Перенос членов уравнения из одной части в другую, мы в одной части их «уничтожаем», но зато в другой «восстанавливаем», меняя при этом их знаки на противоположные. Восстановление — по-арабски *аль-джебр*. От этого слова и произошло название алгебра. Алгебра, которую вы теперь изучаете, возникла и развивалась много веков тому назад именно как наука о решении уравнений.

2 Рассмотрим примеры решения уравнений.

Пример 1. Решим уравнение $\frac{1}{3}x - 1 = 4$.

Воспользовавшись первым правилом, соберём числа в правой части уравнения. Получим

$$\frac{1}{3}x = 4 + 1, \quad \frac{1}{3}x = 5.$$

Воспользовавшись вторым правилом, умножим обе части уравнения на 3:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1}{3}x &= 3 \cdot 5, \\ x &= 15. \end{aligned}$$

Корень уравнения — число 15.

Пример 2. Решим уравнение $3x - 5 = x + 1$.

Соберём члены уравнения, содержащие переменную, в одной части, а числа в другой:

$$\begin{aligned} 3x - x &= 1 + 5, \\ 2x &= 6. \end{aligned}$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$x = 3.$$

Корень уравнения — число 3.

Пример 3. Решим уравнение $\frac{x}{4} = 1 + \frac{2x}{3}$.

Вычисления с целыми числами проще, чем с дробями, поэтому прежде всего избавимся от дробей. Для этого умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей дробей, т. е. на 12. Получим

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} \cdot 12 &= (1 + \frac{2x}{3}) \cdot 12, \\ \frac{x}{4} \cdot 12 &= 12 + \frac{2x}{3} \cdot 12, \\ 3x &= 12 + 8x, \\ -5x &= 12, \\ x &= -2,4. \end{aligned}$$

Каждое из уравнений, которые мы решали, в результате преобразований приводилось к виду $ax = b$. (Вернитесь к примерам: у нас получались уравнения $\frac{1}{3}x = 5$, $2x = 6$, $-5x = 12$.)

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — числа, а x — переменная, называют **линейным**.

В рассмотренных линейных уравнениях коэффициент a при переменной отличен от нуля. Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.

■ Скажите, каким правилом преобразования уравнений надо воспользоваться, чтобы решить уравнение, и решите его:

а) $8 + x = -17$; б) $x - 7 = 9$; в) $-15x = 90$; г) $\frac{1}{8}x = 2$.

■ Решите уравнение и прокомментируйте каждый шаг, ссылаясь на нужное правило преобразования уравнений: а) $5x - 11 = 2x + 1$; б) $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = 1$. (Возьмите в качестве образца для а) пример 2, для б) пример 3.)

А

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (356–359)

- 356** а) $x + 23 = 50$; г) $x - 31 = 12$; ж) $t - 7 = -16$;
 б) $8 + z = 17$; д) $t - 20 = -5$; з) $2 + z = 0$;
 в) $u - 25 = 0$; е) $x + 30 = -14$; и) $u - 4 = -4$.
- 357** а) $4x = 60$; г) $6y = -18$; ж) $12t = 0$;
 б) $10z = 17$; д) $-2x = 6$; з) $-z = -8$;
 в) $5u = -7$; е) $-8t = -2$; и) $15y = -3$.
- 358** а) $3x = 1,2$; в) $-5y = 10,5$; д) $1,2y = 1,2$;
 б) $6z = -5,4$; г) $-2,5x = 2,5$; е) $0,1z = 4,2$.
- 359** а) $2x = \frac{4}{7}$; г) $-\frac{1}{3}x = 4$; ж) $\frac{2}{9}y = 0$;
 б) $-10z = \frac{2}{5}$; д) $\frac{4}{5}z = -20$; з) $-\frac{2}{7}z = -1$;
 в) $3x = -\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}$; и) $-6u = \frac{2}{3}$.

Найдите корень уравнения (360–361).

- 360** а) $3x + 14 = 35$; г) $27 = 6y + 39$; ж) $31 - 2z = 15$;
 б) $\frac{1}{2}x + 9 = 17$; д) $1,5x - 3 = 2$; з) $3 + 0,1x = 4$;
 в) $8 + \frac{2}{3}y = 14$; е) $5 - 0,2z = 1$; и) $1,2t + 0,4 = 1$.
- 361** а) $2x + 3x + 4 = 14$; г) $-10 + x + x = -26$;
 б) $7z - z + 5 = 11$; д) $10y - 3y - 9 = 40$;
 в) $8y - 4y - 12 = -50$; е) $-y + 8 - 14y = 23$.

Решите уравнение (362–366).

- 362** а) $3y = 6 + 2y$; в) $z = 6 - 5z$; д) $3x - 16 = 7x$;
 б) $6x = 4x + 10$; г) $9 + y = 4y$; е) $7z + 9 = 4z$.
- 363** а) $x + 2 = 4 - x$; г) $2x + 3 = 3x - 7$; ж) $10x + 7 = 8x - 9$;
 б) $3x + 1 = 5x - 3$; д) $9x - 2 = 5x - 2$; з) $53 - 6x = 4x - 17$;
 в) $2x - 3 = 2 - 3x$; е) $10 - 3x = 2x - 15$; и) $8 + 2x = 16 + x$.
- 364** а) $10 - 7x = 7 - x$; г) $2,5z - 3 = z - 4,5$;
 б) $t + 6,8 = 9t + 10$; д) $3x + 5 = 0,5x + 10$;
 в) $1 + 2,6z = 6 + 3z$; е) $2,6 + 2x = 1,9x + 6,6$.
- 365** а) $5y + (8y + 9) = 100$; г) $x + (x + 1) + (x + 2) = 9$;
 б) $x - (50 - x) = 12$; д) $(z - 2) + (z - 1) + z = -3$;
 в) $(18 - 3x) - (4 + 2x) = -6$; е) $21 + (20 - 4x) - (11 - 2x) = 0$.

- 366** а) $4(x - 7) = 3x + 5$; г) $2u - 3(7 - 2u) = 3$;
 б) $-5x + 3(3 + 2x) = 7$; д) $12 - y = 5(4 - 2y) + 10$;
 в) $30 - x = 3(20 - x)$; е) $2 - 2(x - 8) = 4x - 4$.

Найдите корень уравнения (**367–369**).

- 367** а) $\frac{1}{3}y + 2 = 1$; г) $3 - \frac{5}{7}t = 1 - \frac{3}{7}t$;
 б) $\frac{1}{5}x + 11 = 1 - \frac{3}{5}x$; д) $\frac{1}{8}u - 2 = \frac{5}{8}u + 1$;
 в) $8 - \frac{1}{4}z = 1$; е) $\frac{2}{5}z - 7 = 3$.
- 368** а) $\frac{y}{2} - 3 = 6$; г) $\frac{u}{5} + \frac{3u}{5} = 4$; ж) $4 - \frac{u}{5} = \frac{4}{5}$;
 б) $\frac{z}{3} + 8 = \frac{2z}{3}$; д) $\frac{x}{4} - 1 = 11$; з) $\frac{z}{10} + 1 = -10$.
 в) $5 + \frac{x}{3} = -1$; е) $\frac{3y}{2} + 5 = \frac{y}{2}$;
- 369** а) $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1$; в) $\frac{y}{2} - \frac{y}{7} = 5$; д) $\frac{y}{3} = \frac{y}{2} - 7$; ж) $\frac{z}{5} = \frac{z}{10} + 1$;
 б) $\frac{z}{8} - \frac{z}{4} = 3$; г) $\frac{x}{5} - 4 = \frac{x}{3}$; е) $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{3} - 4$; з) $\frac{u}{2} - 3 = \frac{u}{4} + 5$.

370 При каких значениях x :

- а) значение выражения $-3x$ равно 3; 0; -1;
 б) значение выражения $5x - 6$ равно -6; 0; -1?

371 При каком значении переменной:

- а) значение выражения $3y + 4$ равно значению выражения $3 - 2y$;
 б) значения выражений $4z - 5$ и $14 + 5z$ противоположны?

372 Найдите значение переменной, при котором:

- а) значение выражения $7 + 5x$ в 2 раза больше значения выражения $3x$;
 б) значение выражения $2x - 4$ в 3 раза меньше значения выражения $2x$;
 в) значение выражения $8z + 3$ на 10 больше значения выражения $4 - 2z$;
 г) значение выражения $15 - 3x$ на 2 меньше значения выражения $2x + 3$.

Б

- 373** Придумайте несколько уравнений, корнем каждого из которых является число: а) 6; б) -10; в) 0; г) $-\frac{1}{3}$.

374 Решите уравнение:

а) $\frac{x}{5} - \frac{x}{2} + \frac{x}{20} = 1$; г) $\frac{x}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x}{2} - x = 1$;

б) $\frac{x}{2} - \frac{x}{12} = 3 - \frac{x}{3}$; д) $\frac{5x}{9} - \frac{2x}{3} - x = 4$;

в) $\frac{x}{5} = \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - 4$; е) $\frac{3x}{4} - x = \frac{4x}{5} + x$.

РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ (375–376)

375 Уравнение $6x = 2(x + 12)$ проще решить, если разделить обе его части на 2:

$$\begin{aligned} 3x &= x + 12, \\ 2x &= 12, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Решите уравнение, воспользовавшись разобранным способом:

а) $3(x + 5) = 90$; г) $6(x - 1) + 3(5 - x) = 9$;
 б) $2(x - 6) = -34$; д) $4(3x - 2) - 4(x - 2) = 2$;
 в) $-2(x + 12) = 6x$; е) $5(6 + x) - 5(2x + 7) = 0$.

376 Уравнение $\frac{1}{3}(x + 8) = 6$ можно решить, умножив на 3 обе его части:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1}{3}(x + 8) &= 6 \cdot 3, \\ x + 8 &= 18, \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Решите уравнение, воспользовавшись разобранным способом:

а) $\frac{1}{5}(x + 4) = 3$; г) $\frac{2}{3}(10 - c) = -8$;
 б) $\frac{1}{4}(2y + 1) = 8$; д) $2t = 1\frac{1}{3}(t + 5)$;
 в) $-\frac{1}{7}(5u - 7) = 6$; е) $1\frac{1}{4}(x - 2) = -5(x + 1)$.

377 В древнеегипетском папирусе (1700 лет до н. э.) содержится решение уравнения, которое на языке современной математики можно записать так: $((x + \frac{2}{3}x) + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x)) \cdot \frac{1}{3} = 10$.
 Решите это уравнение.

378 Запишите вместо c такое число, чтобы корнем получившегося уравнения было целое число:

а) $\frac{1}{8}x = c$; б) $0,1x = c$; в) $cx = 15$; г) $cx = \frac{1}{3}$.

379 Решите уравнение относительно x :

- | | |
|----------------------|------------------------|
| а) $x - a = 2$; | д) $3x + m = 0$; |
| б) $1 - x = c + 2$; | е) $2x - a = b + x$; |
| в) $x + b = 0$; | ж) $4x + a = x + c$; |
| г) $a - x = b$; | з) $c - 3x = 4 - 5x$. |

380 Выразите из равенства каждую переменную через другие:

- | | |
|-----------------------|-----------------------------------|
| а) $a + 2b - c = 0$; | в) $\frac{1}{3}(a + b + c) = 1$; |
| б) $m + n - 2c = 1$; | г) $2(x + y) = 4z$. |

4.4 Решение задач с помощью уравнений

Перевести условие задачи на язык математики можно по-разному, поэтому и уравнения получаются разные. Как правило, лучше сделать наиболее простой перевод.

Составить по условию задачи наиболее простое уравнение помогают некоторые практические правила.

Задача 1. На двух складах было 1840 т угля. Затем на первом складе запас угля удвоили, а на второй привезли ещё 120 т, и тогда на втором складе стало на 620 т меньше, чем на первом. Сколько стало угля на каждом складе?

Какую величину здесь целесообразно обозначить буквой x ? Часто в качестве неизвестного выбирают искомую величину, т. е. то, что требуется найти в задаче. Это можно сделать и в данном случае. Однако если через x обозначить количество угля, которое оказалось, например, на первом складе, то дальше при решении уравнения придётся иметь дело не с целыми числами, а с дробями.

Но в качестве неизвестного совсем не обязательно выбирать именно то, что требуется найти в задаче. Поэтому, руководствуясь неформальным, но мудрым правилом: «Целое лучше дроби», обозначим через x т *исходное* количество угля на первом складе.

Выразим через x другие величины.

На первом складе запас угля удвоили, т. е. там стало $2x$ т угля.

По условию на втором складе было $1840 - x$ т угля, а затем стало $(1840 - x) + 120$ т.

Известно, что на втором складе оказалось на 620 т угля меньше, чем на первом. Составим уравнение:

$$2x - ((1840 - x) + 120) = 620.$$

Решим это уравнение:

$$\begin{aligned} 2x - 1840 + x - 120 &= 620, \\ 3x &= 2580, \\ x &= 860. \end{aligned}$$

Теперь ответим на вопрос задачи: на первом складе стало $860 \cdot 2 = 1720$ т угля, а на втором складе стало $1720 - 620 = 1100$ т.

Заметим, что условие «на втором складе угля стало на 620 т меньше, чем на первом» можно было бы перевести на язык уравнений так:

$$2x = ((1840 - x) + 120) + 620.$$

При этом мы следовали бы другому мудрому правилу: «Плюс лучше минуса».

- По условию разобранной задачи составьте другое уравнение, обозначив буквой x исходное количество угля на втором складе, и решите задачу.

А

Решите задачу, обозначив буквой наименьшую из неизвестных величин (381–383).

- 381** а) Первое число на 27 больше второго, а их сумма равна 95. Найдите эти числа.

б) Одно из чисел втрое больше второго, а разность этих чисел равна 62. Найдите большее из этих чисел.

- 382** а) Сумма трёх слагаемых равна 80. Первое слагаемое в 2 раза больше второго, а второе слагаемое в 3 раза больше третьего. Найдите каждое слагаемое этой суммы.

б) Сумма трёх чисел равна 192. Первое число в 5 раз меньше второго, а второе в 2 раза меньше третьего. Найдите каждое из чисел.

- 383** (Старинная задача.) Трое подмастерьев хотели купить дом за 204 гульдена. На покупку первый дал втрое больше денег, чем второй, а второй дал вчетверо больше, чем третий. Сколько гульденов внёс каждый из подмастерьев?

Решите задачу арифметическим способом, а затем алгебраическим. В каждом случае оцените, какой из них для вас удобнее (384–387).

- 384** а) На дорогу от дома до работы и обратно у Андрея уходит 90 мин. Обратный путь занимает у него на 10 мин больше, чем путь на работу. Сколько минут Андрей добирается до работы и сколько минут он едет домой?

б) На выборах в городскую администрацию за двух кандидатов проголосовало 600 человек. Один из них получил на 120 голосов больше, чем другой. Сколько голосов получил каждый?

- 385** а) Бронза — это сплав олова и меди. Сколько олова и меди содержится в куске бронзы, масса которого 80 кг, если олово и медь входят в неё в отношении 3 : 17?

б) Сколько соли и сколько воды содержится в 200 г раствора соли, если соль и вода входят в него в отношении 1 : 4?

- 386** а) Мальчики составляют $\frac{2}{3}$ всех учащихся школы. Сколько в школе учащихся, если в ней учится 456 мальчиков?
б) Масса котёнка 0,6 кг. Она составляет 0,4 массы щенка. Определите массу щенка.

- 387** а) Ученик прочитал 144 страницы, что составляет 36% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?
б) Масса сушёных яблок составляет 16% массы свежих яблок. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы получить 80 кг сушёных?

Решите задачу (**388—390**).

- 388** а) Одно число составляет $\frac{4}{5}$ другого числа, а их сумма равна 108. Найдите эти числа.
б) Одно число составляет 45% другого. Найдите эти числа, если одно из них на 66 больше другого.

- 389** а) Велосипедист за 3 ч проезжает то же расстояние, что пешеход проходит за 9 ч. Определите скорость каждого, если известно, что скорость велосипедиста на 8 км/ч больше скорости пешехода.

б) Автобус едет от одного города до другого со скоростью 50 км/ч, а автомобиль — со скоростью 80 км/ч, и весь путь занимает у него на 1,5 ч меньше, чем у автобуса. Определите время, за которое автобус проходит расстояние между городами.

- 390** а) В 12 ящиков можно разложить такое же количество яблок, что и в 18 корзин. Определите, сколько килограммов яблок вмещает ящик и сколько корзина, если известно, что в ящик вмещается на 3 кг яблок больше, чем в корзину.

б) Имеющиеся конфеты разложили в коробки по 10 штук в каждую и в пакеты по 8 штук в каждый. Коробок получилось на 4 меньше, чем пакетов. Определите, сколько получилось коробок, если известно, что во всех коробках вместе упаковано столько же конфет, сколько во всех пакетах.

Решите задачу, составив уравнение двумя способами (**391—392**):

- 1) обозначив буквой какую-нибудь скорость движения;
- 2) обозначив буквой искомое расстояние.

- 391** От города до посёлка мотоциклист доехал за 3 ч. Если бы он увеличил скорость на 25 км/ч, то проехал бы это расстояние за 2 ч. Чему равно расстояние от города до посёлка?

- 392** От станции до озера турист доехал на велосипеде за 2 ч. Пешком он мог бы пройти это расстояние за 6 ч. Чему равно расстояние от станции до озера, если на велосипеде турист едет со скоростью, на 10 км/ч большей, чем идёт пешком?

Решите задачу, составив уравнение двумя способами (393—394):

- 1) обозначив буквой искомое расстояние;
- 2) обозначив буквой время движения в каком-либо направлении.

393 Андрей доехал на велосипеде от реки до деревни и вернулся обратно, затратив на весь путь 1 ч. От реки до деревни он ехал со скоростью 10 км/ч, а на обратном пути его скорость была 15 км/ч. Чему равно расстояние от реки до деревни?

394 Пётр прошёл от дома до пристани и вернулся обратно, затратив на весь путь 1 ч. От дома до пристани он шёл со скоростью 4 км/ч, а на обратном пути его скорость была 6 км/ч. Чему равно расстояние от дома до пристани?

Решите задачу, обозначив буквой удобную для составления уравнения величину (395—399).

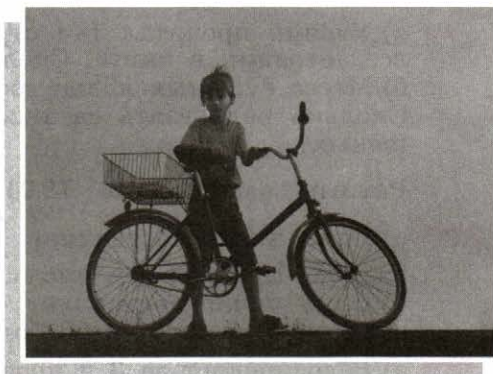
395 Дорога от дома до школы и обратно занимает у Ольги $\frac{1}{2}$ ч. В школу она идёт со скоростью 6 км/ч, а обратно — со скоростью 3 км/ч. Чему равно расстояние от дома до школы?

396 Велосипедист первую половину пути проехал за 3 ч, а вторую половину пути — за 2 ч, так как увеличил скорость на 4 км/ч. Какое расстояние проехал велосипедист?

397 От железнодорожной станции до турбазы туристы шли со скоростью 4 км/ч. Обратно они ехали на велосипедах со скоростью 12 км/ч и затратили на дорогу на 4 ч меньше. Чему равно расстояние от станции до турбазы?

398 Половину всех имеющихся орехов упаковали в большие пакеты по 500 г в каждый, а вторую половину — в маленькие пакеты по 300 г в каждый. Всего получилось 16 пакетов. Сколько было орехов?

399 Все имеющиеся апельсины можно разложить в 3 пакета или в 5 коробок. Сколько килограммов апельсинов имеется, если в пакет вмещается на 2 кг апельсинов больше, чем в коробку?



Б

Решите задачу (400—406).

- 400** а) Существуют ли три последовательных чётных числа, сумма которых равна 74?
б) Существуют ли три последовательных нечётных числа, сумма которых равна 69?
- 401** а) В саду растут яблони, груши и сливы, всего 130 деревьев. Определите, сколько в саду деревьев каждого вида, если известно, что яблонь в 3 раза больше, чем груш, а слив на 10 больше, чем груш.
б) Купили карандаши, кисти и линейки, всего 43 штуки. Линеек купили на 7 штук меньше, чем кистей, и в 4 раза меньше, чем карандашей. Сколько купили карандашей, кистей и линеек в отдельности?
- 402** а) Для трёх аквариумов требуется 61 л воды. Первый аквариум вмещает воды в 1,5 раза больше, чем третий, а второй — на 5 л больше, чем третий. Сколько литров воды вмещает каждый аквариум?
б) Продавец разложил гречневую крупу в четыре пакета. В первый пакет он насыпал в 1,5 раза больше крупы, чем во второй, а ещё в каждый из двух пакетов, т. е. в третий и четвёртый, — на 0,5 кг больше, чем во второй. Сколько килограммов гречневой крупы в каждом пакете, если масса всех четырёх пакетов вместе 14,5 кг?
- 403** а) Из посёлка в город одновременно выехали мотоциклист со скоростью 40 км/ч и велосипедист со скоростью 10 км/ч. Определите, какое время затратил на путь велосипедист, если известно, что он прибыл в город на 1,5 ч позже мотоциклиста.
б) Из туристического лагеря к станции вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через час вслед за ним выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. Он приехал на станцию на 0,5 ч раньше пешехода. Определите расстояние от туристического лагеря до станции.
- 404** а) На одном и том же расстоянии маленький обруч делает 15 оборотов, а большой — 9 оборотов. Длина окружности маленького обруча на 2 м меньше длины окружности большого обруча. Определите длину окружности каждого обруча.
б) Длина окружности маленького обруча 3 м, а большого — 4 м. На одном и том же расстоянии маленький обруч делает на 10 оборотов больше, чем большой. Определите это расстояние.
- 405** Провод длиной 9,9 м разрезали на две части. Определите длину каждой части, если известно, что:
а) одна из них на 20% короче другой;
б) одна из них на 20% длиннее другой.

- 406** а) Когда цену товара увеличили на 30%, он стал стоить 52 р. Определите первоначальную стоимость товара.
б) Цена товара сначала выросла на 20%, а затем снизилась на 15%, после чего товар стал стоить 102 р. Какова была первоначальная стоимость товара?

Решите задачу арифметическим, а потом алгебраическим способом (**407–408**).

- 407** Дима выиграл набор коллекционных марок; $\frac{1}{5}$ этого набора он подарил брату, $\frac{1}{6}$ — сестре, а остальные 19 марок оставил себе. Сколько марок было в наборе?



- 408** Из корзины отсыпали половину орехов, потом ещё половину остатка, затем половину нового остатка и, наконец, половину следующего остатка. После этого в корзине осталось 10 орехов. Сколько орехов было в корзине первоначально?

Решите старинную задачу (**409–412**).

- 409** Летела стая гусей, навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» «Нас не сто гусей, — ответил ему вожак стаи, — если бы нас было столько, сколько теперь, да ещё столько, да полстолько, да четверть столько, да ещё ты, гусь, с нами, так тогда нас было бы сто гусей». Сколько было в стае гусей?
- 410** У Пифагора однажды спросили, сколько у него учеников. «Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны природы, седьмая часть упражняет силу духа. Добавьте ещё к ним трёх юношей, из коих Теон самый способный». Сколько было учеников у Пифагора?
- 411** После того как путник прошёл 3 версты и ещё треть оставшегося пути, ему осталось пройти половину пути и ещё 1 версту. Какой путь осталось пройти путнику?
- 412** Трое мужчин пришли к парикмахеру. Побрив первого, парикмахер сказал: «Посмотри, сколько денег в ящике стола, положи ещё столько же и возьми два рубля сдачи». То же сказал парикмахер и второму, и третьему. Когда они ушли, оказалось, что в ящике денег нет. Сколько денег было в ящике первоначально?

4.5 Некоторые неалгоритмические приёмы решения уравнений

(Для тех, кому интересно)

Уравнения, которые мы рассматривали, решаются с помощью довольно простого *алгоритма*, т. е. такого метода, который требует лишь точного выполнения известных правил. Однако при переводе условия задачи на математический язык может получиться уравнение, алгоритм решения которого вы ещё не знаете или его вообще нет.

Рассмотрим некоторые неалгоритмические приёмы решения уравнений. Обычно такие приёмы труднее, чем алгоритмические, — ведь здесь приходится думать самому, а не пользоваться готовыми правилами.

Пример 1. Фирма заказала 143 компьютера, чтобы распределить их поровну между своими филиалами. Однако потом фирма решила открыть ещё два филиала, и в результате каждый филиал получил на 2 компьютера меньше. Сколько у фирмы стало филиалов?

Обозначим исходное число филиалов буквой x . Тогда по условию задачи каждый филиал должен был получить $\frac{143}{x}$ компьютеров. Но филиалов стало $x + 2$, значит, каждый филиал реально получил $\frac{143}{x+2}$ компьютера. По условию задачи каждый филиал получил на 2 компьютера меньше. Составим уравнение:

$$\frac{143}{x} = \frac{143}{x+2} + 2.$$

Уравнение совсем непростое, но его можно решить, если вспомнить, что x — это количество филиалов фирмы, и, значит, это число натуральное. Кроме того, $\frac{143}{x}$ и $\frac{143}{x+2}$ тоже натуральные числа, поскольку каждое из них — это количество компьютеров. Поэтому числа x и $x+2$ — это делители числа 143. Остаётся найти все натуральные делители числа 143 и выбрать такие два делителя, один из которых на 2 больше другого.

У числа 143 всего четыре натуральных делителя: 1, 11, 13, 143. Перебрав все возможные пары делителей, нетрудно увидеть, что условию удовлетворяет только пара чисел 11 и 13.

Значит, $x = 11$, а $x + 2 = 13$.

Таким образом, у фирмы стало 13 филиалов.

Пример 2. Андрей задумал некоторое натуральное число. Борис предложил ему возвести это число в квадрат, после чего прибавить задуманное число и назвать результат. Результат оказался равным 90. Как Борису узнать, какое число задумал Андрей?

Обозначим задуманное число буквой x . Тогда Андрей, следуя указаниям Бориса, вычислил значение выражения $x^2 + x$ и получил по условию число 90. Мы пришли к уравнению

$$x^2 + x = 90.$$

Попробуем решить это уравнение. Выражение $x^2 + x$ с помощью распределительного закона можно представить в виде произведения:

$$x^2 + x = x \cdot x + 1 \cdot x = x(x + 1).$$

Следовательно, наше уравнение можно заменить таким:

$$x(x + 1) = 90.$$

Теперь ясно, что надо найти натуральное число x такое, что при умножении его на следующее натуральное число в произведении получится 90.

Такие два натуральных числа нетрудно подобрать — это 9 и 10. Значит, $x = 9$.

Кажется, что задача решена, однако это не так. Вдруг есть ещё какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $x(x + 1) = 90$? Ведь в данном случае мы не перебирали все возможные варианты решения, а просто подобрали ответ.

Чтобы убедиться в том, что другого такого числа нет, надо провести дополнительные рассуждения. Например, такие: если $x > 9$, то $x + 1 > 10$, и тогда произведение $x(x + 1)$ больше 90. Точно так же x не может быть меньше 9, потому что в этом случае произведение будет меньше 90. Значит, могло быть задумано только число 9.

Итак, подбор одного или даже нескольких корней вовсе не означает, что нет других. Необходимо провести дополнительные рассуждения, чтобы проверить, что найдены все возможные решения. Такие рассуждения могут оказаться очень непростыми, и это ограничивает применение метода подбора для решения уравнений.

413 Найдите натуральный корень уравнения:

а) $x(x - 1) = 6$; б) $x^2 + x = 12$.

414 Найдите все целые корни уравнения:

а) $x(x + 2) = 35$; б) $x^2 + x = 6$.

415 Найдите целые корни уравнения $(x - 1)^2 + x^2 = 25$.

416 Один из корней уравнения $\frac{6}{x-1} + \frac{6}{x} + \frac{6}{x+1} = 11$ натуральный.

Найдите его перебором.

417 Периметр прямоугольника, стороны которого выражены целым числом сантиметров, равен 28 см. Может ли его площадь быть равной 33 см²? 40 см²?

418 В школе был проведён шахматный турнир, в котором каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если всего было сыграно 28 партий?

Дополнительные задания

Решение уравнений

Решите уравнение (419–424).

- 419** а) $12x - \frac{3}{4} = 0$; в) $0,7x + \frac{1}{5} = 0$;
 б) $0,8 + \frac{1}{4}x = 0$; г) $\frac{2}{5} - 10x = 0$.
- 420** а) $3x + 6 = 5(x - 1) + 10$; в) $12x - (7 - 3x) = 4x$;
 б) $4(1 - x) = 3(2x + 3)$; г) $8x + 3 = 1 - (2x + 4)$.
- 421** а) $0,7(x - 5) = x - 0,1$; в) $9 - x = 0,4(3x - 5)$;
 б) $1,5(x - 6) = 1,4(x + 5)$; г) $1,6(5 - x) = 1,5(4 - x)$.
- 422** а) $2x - (5 - (3x + 4)) = x - 5$; б) $x - 2 - (3 + (7 - 2x)) = -6$.
- 423** а) $1 - \frac{x}{6} + \frac{x}{10} = 0$; в) $\frac{x}{6} - 2 = \frac{x}{4} + 1$;
 б) $4 - \frac{2x}{3} + \frac{x}{6} = 0$; г) $\frac{x}{4} + 2 = \frac{x}{10} - 1$.
- 424** а) $\frac{x}{3} + \frac{3x}{5} = 4 - \frac{x}{15}$; б) $5 - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = x + \frac{x}{3}$.
- 425** Имеет ли корни уравнение:
 а) $3(5 - 2x) = 1 + 2(7 - 3x)$; б) $2(4 - 3x) = 6 - 3(2x - 1)$?

Решение задач

Решите задачу с помощью уравнения (426–435).

- 426** В одном килограмме компота из сухофруктов груш на 100 г больше, чем изюма, и в 3 раза меньше, чем чернослива. Сколько в компоте изюма, чернослива и груш в отдельности?
- 427** В три коробки надо разложить 55 мячей так, чтобы в первой было мячей в 3 раза больше, чем во второй, а в третьей — на 5 мячей больше, чем во второй. Сколько мячей будет в каждой коробке?
- 428** Сумму в 2880 р., отведённую на покупку спортивного инвентаря для школы, распределили следующим образом: на футбольные и волейбольные мячи денег выделили поровну, а на гимнастические скакалки — 20% суммы, выделенной на все мячи. Сколько рублей выделено на каждый вид инвентаря?



- 429** За два художественных альбома заплатили 344 р., причём один альбом стоил на 15% дороже, чем другой. Определите цену каждого альбома.
- 430** Фотоаппарат дороже фотоплёнки в 12 раз. Сколько стоит фотоаппарат и сколько фотоплёнка, если за 2 фотоаппарата и 6 фотоплёнок заплатили 2250 р.?
- 431** Несколько друзей хотят купить волейбольный мяч. Если каждый из них даст 20 р., то на покупку не хватит 40 р. Если же каждый даст 30 р., то у них останется 60 р. Сколько было друзей? Сколько стоит мяч?
- 432** В магазине смешали конфеты по 110 р. и по 150 р. за килограмм и получили смесь по 120 р. за килограмм. Сколько конфет того и другого сорта содержится в килограмме смеси?
- 433** Дима сказал: «Толя в 2 раза старше меня. В то же время я на 4 года младше Коли, а Коля на 4 года младше Толи». Сколько лет Диме?
- 434** а) Антон младше своего брата на 4 года и в 5 раз младше своей матери. А его брат в 4 раза младше отца. Сколько лет каждому из братьев, если всем четверым вместе 86 лет?
б) Ольга младше своего мужа на 8 лет. Её сын старше её дочери на 5 лет и младше Ольги в 4 раза. Сколько лет каждому, если всем четверым вместе 73 года?
- 435** а) Брат старше сестры в 3 раза, а через 10 лет он будет старше сестры в 2 раза. Сколько лет брату, сколько сестре?
б) Отец старше сына на 24 года, а через 5 лет он будет старше сына в 4 раза. Сколько лет отцу, сколько сыну?

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Что называется корнем уравнения? Что значит «решить уравнение»?
- 2 Сформулируйте два основных правила преобразования уравнений.
- 3 Опишите по шагам решение уравнения $5(x - 4) = 3x + 10$.
- 4 Какое уравнение называется линейным? Приведите пример линейного уравнения.
- 5 Разъясните суть алгебраического метода решения задач на примере следующей задачи:
«Ученик задумал число, умножил его на 4, из результата вычел 5 и получил удвоенное задуманное число. Какое число задумал ученик?»

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- 1 Какие из чисел $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ являются корнями уравнения $x^2 + 2x - 3 = 0$?

Решите уравнение **(2–9)**.

- 2 $-8x = 3,2$. 6 $3 - 4x = x - 12$.
 3 $\frac{2}{3}x = 6$. 7 $(x + 7) - (3x + 5) = 2$.
 4 $4 - 5x = 0$. 8 $3(2x - 1) + 12 = x$.
 5 $10x + 7 = 3$. 9 $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7$.

Решите задачу с помощью уравнения **(10–12)**.

- 10 К Новому году учащиеся первого и второго классов сделали 150 ёлочных игрушек, причём второклассники сделали на 16 игрушек больше, чем первоклассники. Сколько игрушек сделали первоклассники и второклассники по отдельности?
- 11 Купили 165 билетов в театр и цирк, причём билетов в театр в 2 раза больше, чем в цирк. Сколько купили театральных билетов и сколько билетов в цирк?
- 12 В седьмых классах школы учатся 48 человек, что составляет 8% всех учащихся школы. Сколько всего учеников в школе?

Проверьте себя (тест)

- 1 Корнями какого уравнения являются числа 2 и -1 ?
- 1) $x^2 - 3x + 2 = 0$ 3) $x^2 - x - 2 = 0$
 2) $x^2 + 3x + 2 = 0$ 4) $x^2 + x - 2 = 0$
- 2 Соотнесите каждое уравнение с числом его корней:
- А) $x^2 = 4$ 1) один корень
 Б) $2x - (x - 3) = 0$ 2) два корня
 В) $|x| + 4 = 0$ 3) нет корней
- 3 Решите уравнение $15 - x = 2(x - 30)$.
- 4 Решите уравнение $5(2x - 1) - 4(3x + 1) = 2$.

5 Каким числом является корень уравнения $\frac{x}{5} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4}$?

- 1) целым положительным 3) дробным положительным
2) целым отрицательным 4) дробным отрицательным

6 Прочитайте задачу: «В три коробки надо разложить 65 мячей так, чтобы в первой было мячей в 3 раза больше, чем во второй, а в третьей – на 5 мячей меньше, чем в первой. Сколько мячей должно быть в каждой коробке?»

Число мячей во второй коробке обозначено буквой x . Какое уравнение соответствует условию задачи?

- 1) $3x + x + (3x + 5) = 65$ 3) $(x + 3) + x + (x - 5) = 65$
2) $3x + x + (x - 5) = 65$ 4) $3x + x + (3x - 5) = 65$

7 Во втором баке было в 2 раза больше воды, чем в первом. Когда в первый бак долили 20 л воды, а из второго отлили 15 л воды, то воды в баках стало поровну. Сколько воды было в каждом баке первоначально?

8 За игрушку в подарочной упаковке заплатили 324 р. Стоимость упаковки составила 8% от стоимости игрушки. Сколько стоит игрушка?

9 В какое уравнение нельзя преобразовать уравнение

$$16x = 12(x - 3)?$$

- 1) $8x = 6(x - 3)$ 3) $4x = 3x - 3$
2) $16x = 12x - 36$ 4) $3(x - 3) = 4x$

10 Дано уравнение $ax = 3$, где a – некоторое число, x – переменная. Найдите a , если известно, что корень уравнения равен $\frac{2}{3}$.

11 Решите уравнение $2a - b + 4x = c$ относительно x .

- 1) $x = \frac{2a - b + c}{4}$ 3) $x = 4(c - 2a + b)$
2) $x = \frac{c - 2a + b}{4}$ 4) $x = \frac{c - 2a - b}{4}$

12 При каком значении x значения выражений $8x - 15$ и $2x - 10$ противоположны?

- 1) при $x = -2,5$ 3) при $x = \frac{5}{6}$
2) при $x = 2,5$ 4) при $x = \frac{25}{9}$

Координаты и графики

Идея координат принадлежит к числу древнейших достижений человеческой мысли, но только в XVII в. благодаря серьёзным успехам в области алгебры зародился мощный математический инструмент — метод координат. Его возникновение обычно связывают с именем великого французского математика, физика и философа Рене Декарта. Метод координат — это способ перевода геометрической задачи на язык алгебры, после чего мы получаем возможность использовать для её решения хорошо разработанный символический аппарат алгебры. В дальнейшем вы тоже познакомитесь с методом координат. А пока при изучении этой главы вам предстоит научиться свободно ориентироваться в системе координат, анализировать информацию, представленную графически, приобрести элементарные навыки перевода с геометрического языка на алгебраический и наоборот.

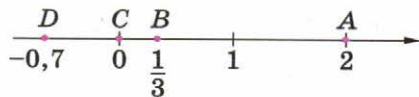
5.1 Множества точек на координатной прямой

Как вы уже знаете, числа можно изображать точками на прямой. Для этого на прямой, расположенной, как правило, горизонтально, выбирают начало отсчёта, положительное направление и единичный отрезок. Чтобы построить точку, соответствующую некоторому числу a , вправо или влево от начала отсчёта (в зависимости от знака a) откладывается отрезок, равный $|a|$. Число a в таком случае называют **координатой** построенной точки.

Например, точки A, B, C, D , изображённые на рисунке 5.1, имеют соответственно координаты

$2, \frac{1}{3}, 0, -0,7$ — это их «адреса» на координатной прямой. Напомним, что координата точки записывается

в скобках: $A(2), B(\frac{1}{3}), C(0), D(-0,7)$.



■ Рис. 5.1

Соответствие между числами и точками прямой для математиков настолько привычно, что часто число и изображающую его точку не различают и вместо «точка имеет координату $\frac{1}{3}$ » говорят просто: «точка $\frac{1}{3}$ ».

Рассмотрим множество точек координатной прямой, имеющих координату, большую 3, а значит, расположенных правее точки 3 (рис. 5.2). Такое множество точек называют **открытым лучом**. Так же называют и соответствующее множество чисел. Слово «луч» подсказано геометрией, а открытым его называют потому, что граничная точка 3 ему не принадлежит (на рисунке такую точку обозначают светлым кружком). На языке алгебры это множество можно задать неравенством $x > 3$: если в это неравенство вместо переменной x подставить координату любой точки, принадлежащей лучу, получится верное числовое неравенство; если же вместо x подставить координату точки, не принадлежащей лучу, то получится неверное числовое неравенство.



Рис. 5.2

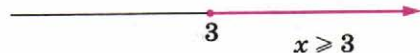


Рис. 5.3

Пусть теперь рассматриваемому множеству точек принадлежит и граничная точка 3 (рис. 5.3). Такое множество точек (как и соответствующее множество чисел) называют **замкнутым лучом**. Этот луч можно задать неравенством $x \geq 3$. Запись $x \geq 3$ читают так: « x больше или равно 3». Но можно сказать и по-другому: « x не меньше 3» («не меньше» — это отрицание «меньше»).

Неравенствами $x < 3$ и $x \leq 3$ также задаются лучи — открытый и замкнутый. Они изображены на рисунке 5.4, а, б. Вы, наверное, догадались, что знак $\leq$ читается как «меньше или равно»; его также можно прочесть и как «не больше».



Рис. 5.4

Множество точек, изображённое на рисунке 5.5, как и соответствующее ему множество чисел, называют **интервалом**. Любая точка этого интервала лежит правее точки -1 и левее точки 2 . Значит, любая точка этого интервала удовлетворяет сразу двум неравенствам: $x > -1$ (или, что то же самое, $-1 < x$) и $x < 2$. Такие два неравенства обычно записывают в виде двойного неравенства $-1 < x < 2$.

Множество, изображённое на рисунке 5.6, задаваемое двойным неравенством $-1 \leq x \leq 2$, называют **отрезком**.

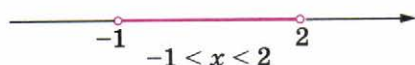


Рис. 5.5

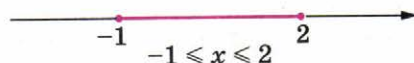


Рис. 5.6

Рассмотренные множества — лучи, интервалы и отрезки — называют **числовыми промежутками** или просто **промежутками**.

Числовые промежутки

Название	Изображение	Запись на языке алгебры
Открытый луч		$x > a$
		$x < b$
Замкнутый луч		$x \geq a$
		$x \leq b$
Отрезок		$a \leq x \leq b$
Интервал		$a < x < b$

- Чем различаются изображения и алгебраическая запись отрезка и интервала? открытого луча и замкнутого луча? Проиллюстрируйте свои ответы примерами.
- Для каждого изображения числового промежутка укажите соответствующее ему неравенство или двойное неравенство.



1) $x \geq 2$



2) $2 < x < 5$



3) $x > 2$



4) $x < 5$

5) $2 \leq x \leq 5$

6) $x \leq 5$

А

436 Изобразите на координатной прямой множество точек, заданное неравенством: а) $x > 6$; б) $x \leq 6$; в) $x \geq -2$; г) $x < 7$. Как называется каждое из этих множеств?

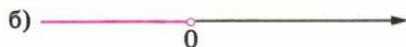
437 Изобразите на координатной прямой множество всех точек: а) с отрицательными координатами; б) с неотрицательными координатами.

Задайте каждое из этих множеств с помощью неравенства.

- 438** Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют двойному неравенству:
 а) $4 \leq x \leq 10$; б) $-15 \leq x \leq 27$; в) $8 < x < 11$.

- 439** Изобразите на координатной прямой промежутки:
 а) $x < -4$; б) $x \leq -10$; д) $-30 < x < 30$;
 б) $x \geq -12$; г) $x > 100$; е) $-37 \leq x \leq 54$.

- 440** ■ РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ ■ Опишите на алгебраическом языке промежутки, изображённые на рисунке 5.7, а—е.



■ Рис. 5.7

- 441** Изобразите на координатной прямой и опишите на алгебраическом языке:

- а) замкнутый луч с началом в точке 2 (сколько существует таких лучей?);
 б) открытый луч с началом в точке -1 (сколько существует таких лучей?);
 в) интервал от точки -2 до точки 3;
 г) отрезок с концами в точках -8 и -2 .

- 442** Какие из точек -6 ; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; 0; 0,4 принадлежат лучу, изображённому на рисунке 5.8?



- 443** Какие из чисел 0; $\frac{1}{2}$; -2 ; 16 ■ Рис. 5.8 принадлежат промежутку:

- а) $x < 16$; б) $x \geq 0,5$; в) $2 \leq x \leq 16$; г) $0 < x < \frac{1}{3}$?

- 444** Найдите точку с целой положительной координатой, принадлежащую отрезку $-0,2 \leq x \leq 2,7$. Сколько таких точек на отрезке? Сколько точек имеют целую неотрицательную координату?

- 445** Сколько целых чисел принадлежит:

- а) интервалу $-1,5 < x < 4$; б) отрезку $-1,5 \leq x \leq 4$;
 в) лучу $x > -1$; г) лучу $x \geq -1$?

- 446** Назовите наименьшее и наибольшее целое число, принадлежащее указанному промежутку (если такое существует):

- а) интервалу $-15 < x < 3$; б) отрезку $-2,5 \leq x \leq 8$;
 в) лучу $x < 5$; г) лучу $x \geq 0$.

Б

- 447** ■ РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ ■ На рисунке 5.9, а, б изображены числовые промежутки, которые называют **полуинтервалами**. Запишите соответствующие им неравенства.

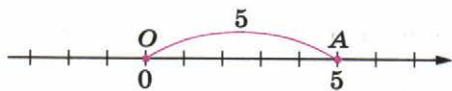


■ Рис. 5.9

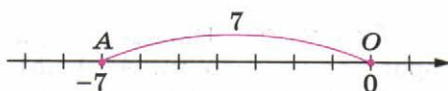
- 448** Запишите с помощью двойных неравенств и изобразите на координатной прямой полуинтервалы от точки 0 до точки 0,3. Сколько существует таких полуинтервалов?
- 449** Изобразите на координатной прямой указанные промежутки (используйте для этого разные цветные карандаши). Найдите объединение и пересечение этих промежутков:
- а) $-1 \leq x \leq 7$, $1 \leq x \leq 10$; в) $0 < x < 7$, $2 \leq x < 7$;
 б) $-5 \leq x \leq -2$, $-2 \leq x \leq 5$; г) $-8 \leq x < -4$, $-4 < x \leq 0$.
- 450** ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Какое утверждение неверно?
- 1) пересечение промежутков, заданных неравенствами $x \leq 1$ и $x \leq 6$, есть промежуток $x \leq 6$
 2) объединение промежутков, заданных неравенствами $x \leq 1$ и $x \leq 6$, есть промежуток $x \leq 6$

5.2 Расстояние между точками координатной прямой

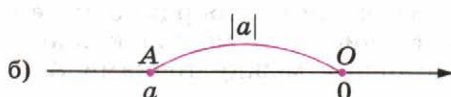
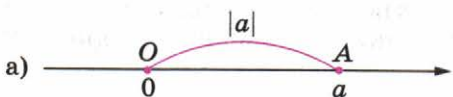
- Если нам известна координата точки A на прямой, то мы знаем и расстояние от этой точки до начала отсчёта, т. е. длину отрезка OA . Например, если точка A имеет координату, равную 5, то $OA = 5$ (рис. 5.10); если же её координата равна -7 , то $OA = 7$ (рис. 5.11). Вообще если точка A имеет координату $x = a$, то расстояние между точками A и O равно $|a|$ (рис. 5.12, а, б).



■ Рис. 5.10



■ Рис. 5.11



■ Рис. 5.12

Пусть теперь на прямой заданы две произвольные точки A и B . Как, зная их координаты, найти расстояние между ними, т. е. как найти длину отрезка AB ?

Оказывается, в математике есть специальная формула для решения этой задачи: если точки A и B имеют соответственно координаты $x = a$ и $x = b$, то

$$AB = |b - a|.$$

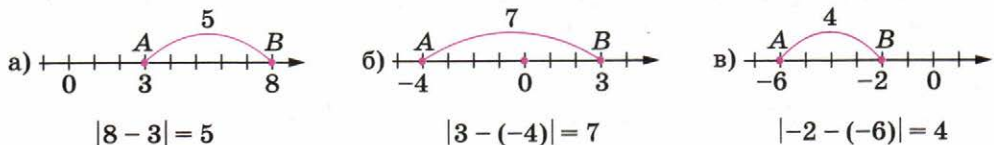
Словами эту формулу читают так:

расстояние между двумя точками координатной прямой равно модулю разности их координат.

Понятно, что выражение $|b - a|$ можно заменить выражением $|a - b|$. В самом деле, числа $a - b$ и $b - a$ противоположны и их модули равны.

Убедимся в справедливости этой формулы в некоторых конкретных случаях.

Для этого обратимся к рисункам a — $в$ (рис. 5.13). На каждом из них изображена координатная прямая и отмечены точки A и B . Найдём, например, для случая $б$ расстояние AB по рисунку и по формуле и сравним результаты. Из рисунка видно, что расстояние между точками $A(-4)$ и $B(3)$ равно 7. Такой же результат мы получим, если вычислим расстояние по формуле $AB = |3 - (-4)| = |7| = 7$. (Проведите самостоятельно аналогичные подсчёты для рисунков a , $в$.)



■ Рис. 5.13

Заметим, что формула $AB = |b - a|$ справедлива и в том случае, когда точки A и B совпадают.

2 Приведём пример решения задачи с использованием рассмотренной формулы.

Пример. Найдём координату середины отрезка, концами которого служат точки $A(-11,5)$ и $B(3,9)$.

Вычислим расстояние между точками A и B :

$$AB = |3,9 - (-11,5)| = |15,4| = 15,4.$$

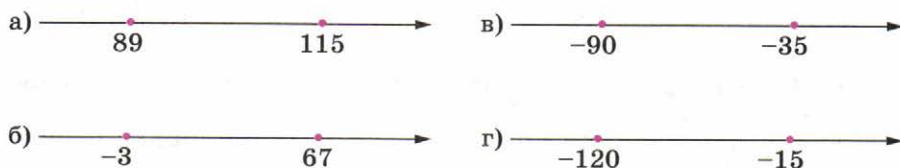
Обозначим координату середины отрезка AB через x . Чтобы найти число x , можно к координате точки A прибавить половину расстояния между точками A и B :

$$x = -11,5 + 7,7 = -3,8.$$

- На координатной прямой заданы точки $M(m)$ и $N(n)$. Запишите формулу, по которой можно вычислить расстояние между этими точками. Справедлива ли эта формула, если одна из точек совпадает с началом отсчёта?
- Найдите координату середины отрезка AB для каждого случая на рисунке 5.13.
- Расскажите, как найдена координата середины отрезка в примере из фрагмента 2.

A

- 451** Найдите расстояние между точками, отмеченными на координатной прямой (рис. 5.14, $a-z$).



■ Рис. 5.14

- 452** Найдите длины отрезков AB , AC , AO , AD , BD (рис. 5.15).



■ Рис. 5.15

- 453** Найдите длину отрезка MN , если:

- а) $M(-7)$, $N(35)$;
- б) $M\left(\frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{3}\right)$;
- в) $M(-2,76)$, $N(-2,83)$.

- 454** а) Найдите координату точки C , которая является серединой отрезка с концами в точках $A(-6,8)$ и $B(12,4)$.
 б) Найдите координату точки K , которая является серединой отрезка с концами в точках $M(10,6)$ и $N(-2,4)$.

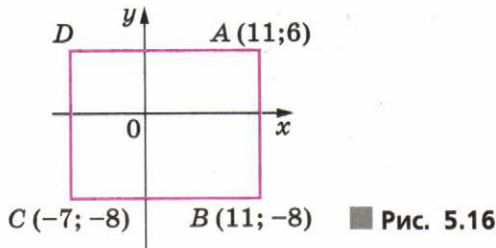
■ РАССУЖДАЕМ (455–457) ■

- 455** Зная координату точки A на прямой и расстояние между точками A и B , найдите координату точки B :

- а) $A(-1)$, $AB = 4$; б) $A(2)$, $AB = 6$.

- 456** Точка A имеет координату, равную -4 , а точка B — координату, равную 18 . Найдите координаты точек, которые делят отрезок AB на четыре равные части.

- 457** Четырёхугольник $ABCD$, изображённый на рисунке 5.16, является прямоугольником. Найдите периметр этого прямоугольника.

**Б**

- 458** Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $|x| = 2$; б) $|x| \leq 1$; в) $|x| \geq 3$.

Подсказка. Прочитайте данное условие, используя слово «расстояние», например: $|x| = 6$ — расстояние от точки x до 0 равно 6.

- 459** 1) Задайте двойным неравенством множество точек, удовлетворяющих условию $|x| < 4$.
2) Задайте промежутки $-6 < x < 6$ с помощью неравенства с модулем.

- 460** ■ РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ ■ 1) Прочитайте, используя слово «расстояние»:

а) $|m - 1| = 5$; б) $|m - 6| < 20$; в) $|a - (-2)| > 3$; г) $|c + 10| \leq 1$.

2) Запишите предложения с помощью знака модуля:

- а) расстояние между точками c и 5 равно 8;
б) расстояние между точками a и 3 больше 1;
в) расстояние между точками b и -9 меньше или равно 10;
г) расстояние между точками y и -2 больше или равно 12.

- 461** Изобразите на координатной прямой множество точек, удовлетворяющих условиям:

- а) $|x - 5| = 3$, $|x - 5| \leq 3$, $|x - 5| \geq 3$;
б) $|x - 1| = 6$, $|x - 1| < 6$, $|x - 1| > 6$;
в) $|x + 3| = 4$, $|x + 3| \leq 4$, $|x + 3| \geq 4$;
г) $|x + 2| = 5$, $|x + 2| < 5$, $|x + 2| > 5$.

5.3 Множества точек на координатной плоскости

- 1** На прямой положение точки определяется одной координатой, а на плоскости в прямоугольной (декартовой) системе координат положение точки определяется двумя её координатами — **абсциссой** и **ординатой**. Напомним, что единичные отрезки по осям координат берутся равными.

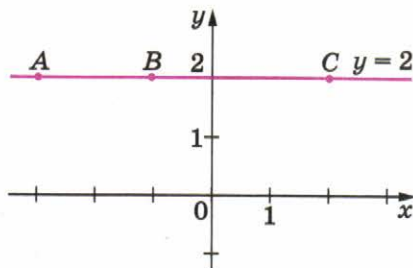


Рис. 5.17

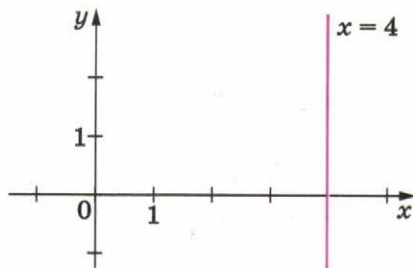


Рис. 5.18

А если нам известна только одна из координат точки на плоскости? Где такая точка может быть расположена? Похожую задачу решали герои романа Жюль Верна «Дети капитана Гранта». Обнаружив записку, они смогли разобрать только одну из географических координат — широту того места, где корабль потерпел кораблекрушение. Поэтому им пришлось обходить всю Землю по 37-й параллели.

Вернёмся к прямоугольной системе координат на плоскости. Пусть задана только одна координата точки, например, известно, что $y = 2$. Посмотрите на рисунок 5.17. Понятно, что ординату, равную 2, имеет и точка А, и точка В, и точка С, и вообще все точки, лежащие на прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку 2 на оси ординат. Любая другая точка координатной плоскости имеет ординату, отличную от 2. Таким образом, равенство $y = 2$ задаёт на координатной плоскости прямую, параллельную оси абсцисс.

Точно так же множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $x = 4$, — это прямая, параллельная оси ординат (рис. 5.18).

Ось ординат задаётся равенством $x = 0$, а ось абсцисс — равенством $y = 0$ (рис. 5.19).

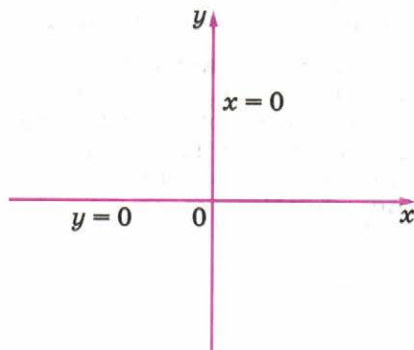


Рис. 5.19

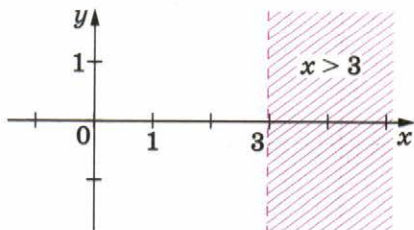


Рис. 5.20

2 Мы уже знаем, что на координатной прямой неравенству $x > 3$ соответствует открытый луч. А на координатной плоскости это же условие задаст уже полуплоскость; она расположена правее прямой $x = 3$ (рис. 5.20). Все точки этой полуплоскости имеют

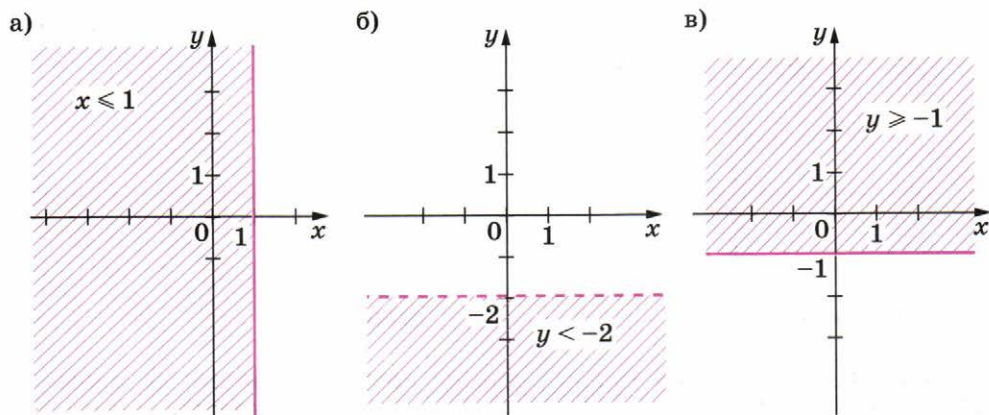


Рис. 5.21

абсциссы, большие 3. Ни точки прямой $x = 3$, ни точки левее этой прямой таким свойством не обладают.

На рисунке 5.21 изображены некоторые полуплоскости и указаны неравенства, которым они соответствуют.

Двойное неравенство $1 \leq x \leq 3$ задаёт на координатной плоскости вертикальную полосу (рис. 5.22), а двойное неравенство $2 \leq y \leq 5$ — горизонтальную полосу (рис. 5.23). А если потребовать, чтобы выполнялись одновременно оба условия, то на координатной плоскости получится пересечение этих полос — прямоугольник (рис. 5.24).

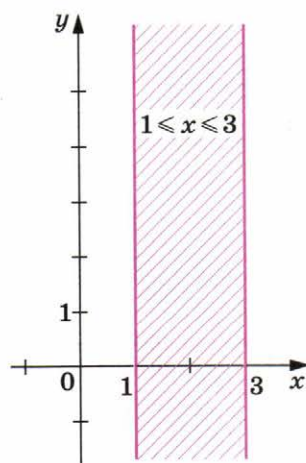


Рис. 5.22

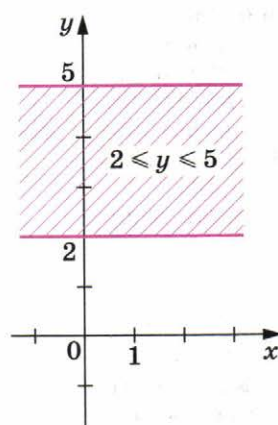


Рис. 5.23

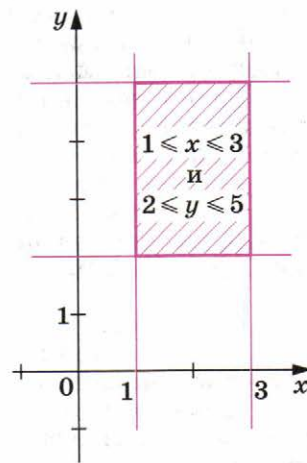


Рис. 5.24

- а) Какое из равенств $x = 5$ или $y = 5$ задаёт в координатной плоскости горизонтальную прямую и какое – вертикальную? Сделайте рисунок.
 б) Какими условиями задаются ось x и ось y ?
- На рисунке 5.21, в изображена полуплоскость, заданная неравенством $y \geq -1$. Какие из следующих точек принадлежат этой полуплоскости: $(-3; 1)$; $(2; 0)$; $(2; -3)$; $(0; -2)$; $(3; -1)$; $(100; -2)$; $(-1; 100)$?
- На рисунке 5.24 изображён прямоугольник, заданный условиями: $1 \leq x \leq 3$ и $2 \leq y \leq 5$. Назовите координаты каких-нибудь пяти точек, которые принадлежат этому прямоугольнику, и пяти точек, которые ему не принадлежат.

А

462 Изобразите на координатной плоскости множество точек, которое задаётся равенством:

- а) $x = 3$; в) $y = -2$; д) $x = 0$;
 б) $x = -1,25$; г) $y = 25$; е) $y = 0$.

463 Опишите на алгебраическом языке прямые, изображённые на рисунке 5.25 а–г.

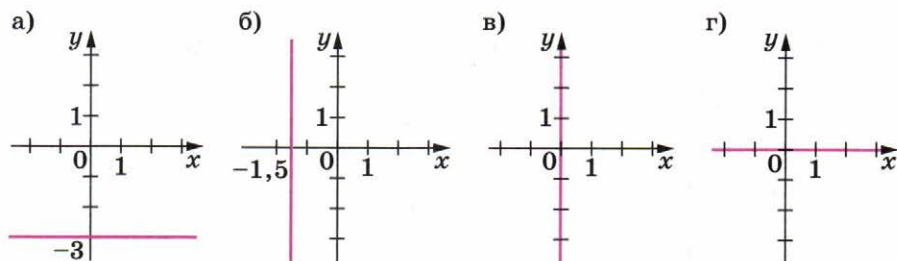


Рис. 5.25

464 Опишите на алгебраическом языке:

- а) прямую, проходящую через точку 5 оси ординат и параллельную оси абсцисс;
 б) прямую, проходящую через точку $(-5; 2)$ и параллельную оси ординат.

465 ■ РАССУЖДАЕМ ■ а) Известно, что точки $A(2; -1)$ и $B(5; a)$ расположены на прямой, перпендикулярной оси ординат. Найдите число a .

б) Известно, что точки $M(-4; 2)$ и $N(c; -3)$ расположены на прямой, параллельной оси ординат. Найдите число c .

466 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

- а) $x > 5$; в) $x \geq 0$; д) $y < -2$;
 б) $x \leq \frac{2}{5}$; г) $y \geq 0$; е) $y > -3,5$.

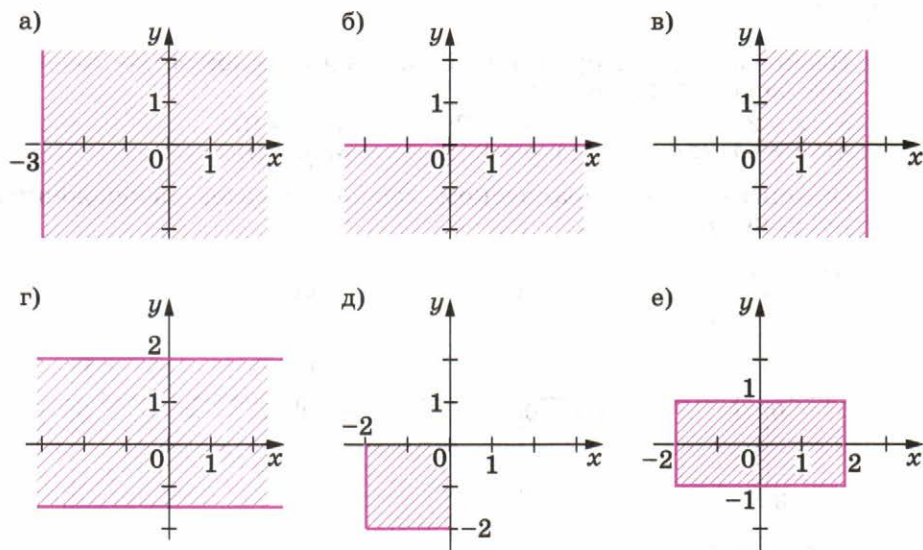
467 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют двойному неравенству:

- а) $-12 \leq x \leq 8$; в) $-5,5 \leq x \leq -5$;
б) $1,5 < y < 2$; г) $-0,5 \leq y \leq 1,5$.

468 Изобразите на координатной плоскости множество точек, у которых:

- а) $-1 \leq x \leq 4$ и $-2 \leq y \leq 3$;
б) $0 \leq x \leq 10$ и $0 \leq y \leq 10$.

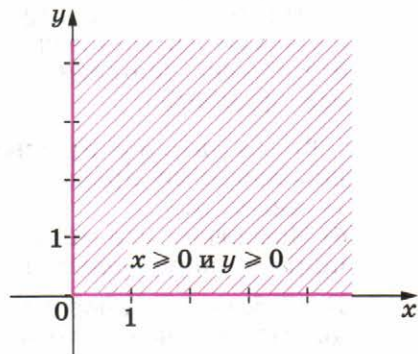
469 Опишите на алгебраическом языке области координатной плоскости, изображённые на рисунке 5.26, а–е.



■ Рис. 5.26

470 Неравенства $x \geq 0$ и $y \geq 0$ задают первую координатную четверть (рис. 5.27) — все её точки имеют неотрицательные координаты. Опишите на алгебраическом языке каждую из остальных трёх координатных четвертей.

471 Задайте алгебраически множества точек, изображённые на рисунке 5.28, а, б.



■ Рис. 5.27

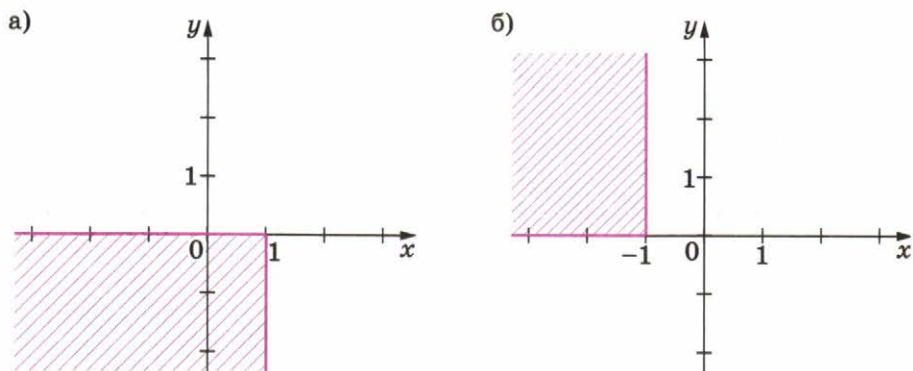


Рис. 5.28

Б

472 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

- а) $|x| = 3$; в) $|y| \leq 2$; д) $|x| \leq 3$ и $|y| \leq 3$;
 б) $|y| = 1$; г) $|x| \geq 5$; е) $|x| \geq 3$ и $|y| \geq 3$.

473 Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное условиями:

- а) $y = 1$ и $x > 3$; б) $y = 3$ и $1 < x < 3$; в) $|y| = 2$ и $|x| > 4$.

474 Постройте на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке прямую, симметричную точкам прямой $x = 3$:

- а) относительно оси ординат;
 б) относительно прямой $x = 1$.

475 Изобразите на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных относительно оси абсцисс точкам полосы, заданной неравенством $2 \leq y \leq 5$.

5.4 Графики

1 Теперь мы будем рассматривать множества точек координатной плоскости, абсциссы и ординаты которых связаны какой-либо зависимостью. Что, например, представляет собой множество точек, у которых ордината равна абсциссе, т. е. координаты которых удовлетворяют равенству $y = x$?

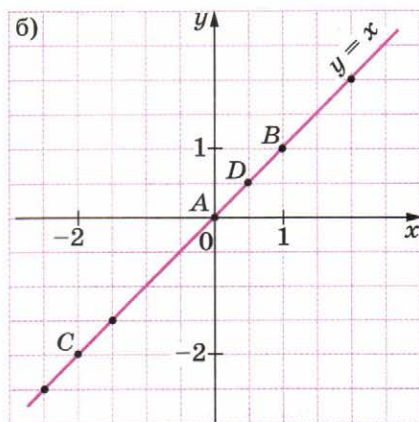
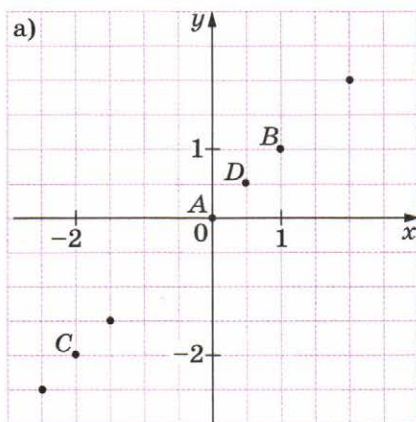


Рис. 5.29

Отметим на координатной плоскости несколько точек, имеющих равные координаты, например $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(-2; -2)$, $D(0.5; 0.5)$ (рис. 5.29, а). Мы видим, что все эти точки лежат на одной прямой, являющейся биссектрисой I и III координатных углов (рис. 5.29, б). Вообще, если абсцисса и ордината точки равны, то эта точка принадлежит биссектрисе I и III координатных углов, и, наоборот, у всякой точки, принадлежащей этой биссектрисе, абсцисса и ордината — равные числа. Таким образом, равенство $y = x$ задаёт на координатной плоскости прямую, которая является биссектрисой I и III координатных углов. Говорят, что эта биссектриса — **график зависимости $y = x$** .

2 На рисунке 5.30 изображена биссектриса II и IV координатных углов. Как описать эту прямую на алгебраическом языке? Попробуем найти зависимость, которая связывает абсциссы и ординаты её точек.

Этой прямой принадлежат, например, точки $A(2; -2)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 1)$. У каждой из этих точек абсцисса и ордината — противоположные числа. На языке алгебры это можно записать так: $y = -x$. Равенству $y = -x$ удовлетворяет любая точка рассматриваемой прямой, и никакая другая точка координатной плоскости этому условию не удовлетворяет. Значит, прямая — биссектриса II и IV координатных углов — задаётся равенством $y = -x$. Иными словами, эта биссектриса — график зависимости $y = -x$.

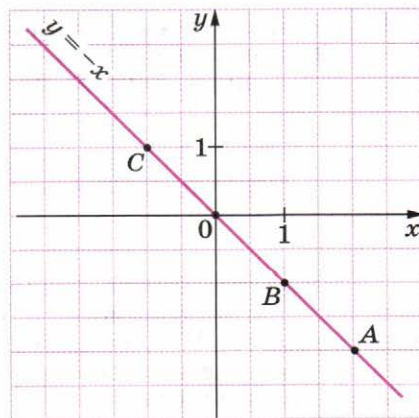


Рис. 5.30

3 Построим теперь на координатной плоскости множество точек, координаты которых связаны более сложным соотношением — равенством $|y| = |x|$. При этом нам пригодятся факты, рассмотренные выше.

Если модули двух чисел равны, то эти числа либо равны, либо противоположны. Следовательно, условие $|y| = |x|$ означает, что

$$y = x \text{ или } y = -x.$$

Значит, множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|y| = |x|$, образовано двумя прямыми $y = x$ и $y = -x$. Иными словами, оно является объединением этих прямых (рис. 5.31).

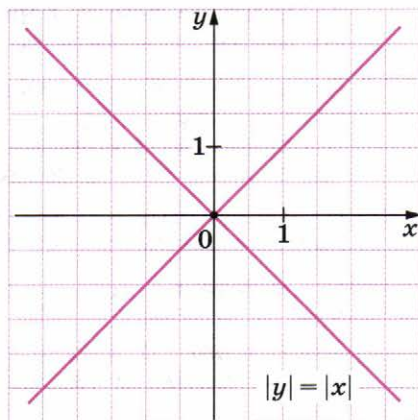


Рис. 5.31

- а) Что является графиком зависимости, заданной условием $y = x$? Сделайте рисунок.
- б) Назовите координаты нескольких точек, принадлежащих этому графику.
- в) Есть ли на графике точка, абсцисса которой равна 245? Если есть, то какова её ордината?
- а) Что является графиком зависимости, заданной условием $y = -x$? Сделайте рисунок.
- б) Есть ли на этом графике точка, абсцисса которой равна -125? Если есть, то какова её ордината?
- в) Какие из следующих точек принадлежат этому графику: (7; -7); (-15; 15); (100; 100); (-20; 20); (0; 0); (10; -20)?

A

476 ■ **ДЕЙСТВУЕМ ПО ПЛАНУ** ■ 1) Постройте график зависимости $y = x + 2$. Для этого:

- Вычислите значения y для указанных значений x и заполните таблицу:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

- Постройте точки, координаты которых занесены в таблицу. Если вы всё сделали аккуратно, то все точки будут лежать на одной прямой.
- Проведите эту прямую с помощью линейки.

2) Отметьте точки пересечения построенной прямой с осями координат. Найдите координаты этих точек.

477 Принадлежит ли графику зависимости, заданной равенством $y = 1 - x$, точка $A(1; 0)$? $B(-2; 3)$? $C(3; 2)$? $D(-4; -3)$? Назовите координаты ещё двух точек, принадлежащих этому графику, и двух точек, не принадлежащих ему.

478 Из точек $A(0; 5)$, $B(-3; 2)$, $C(3; -8)$ и $D(-5; 0)$ выберите те, которые принадлежат графику зависимости $x + y = -5$.

479 Постройте по точкам график зависимости, заданной равенством: а) $y = -2x$; б) $y = 2 - x$; в) $y - x = 3$.

Подсказка. В каждом случае составьте таблицу значений x и y . В случае в удобно сначала выразить y через x : $y = x + 3$.

480 Задайте на алгебраическом языке и изобразите на координатной плоскости множество точек, у которых:

а) ордината равна утроенной абсциссе;

б) ордината на 3 больше абсциссы;

в) абсцисса на 2 больше ординаты;

г) сумма абсциссы и ординаты равна 4.

481 Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:

а) $y = x$ и $-2 \leq x \leq 3$;

г) $x + y = 0$ и $2 \leq y \leq 5$;

б) $y - x = 0$ и $-1 \leq x \leq 1$;

д) $|x| = |y|$ и $-1 \leq x \leq 1$;

в) $y = -x$ и $-4 \leq x \leq 4$;

е) $|y| = |x|$ и $-3 \leq x \leq 3$.

Б

482 а) Составьте таблицу соответственных значений x и y по графику, который изображён на рисунке 5.32, а. Какая зависимость связывает координаты точек этой прямой? Запишите её на алгебраическом языке.

б) Выполните аналогичное задание, используя график, изображённый на рисунке 5.32, б.

483 На рисунке 5.32, а изображена прямая, которая является графиком зависимости $y = \frac{1}{2}x$ (см. задание 482). Перенесите этот рисунок в тетрадь и постройте в той же системе координат прямую, симметричную этой прямой относительно оси ординат. Найдите зависимость, связывающую координаты точек построенной прямой, и задайте её алгебраически.

484 Известно, что график зависимости $y = 2x$ — прямая. Постройте эту прямую по точкам. (Сколько точек для этого достаточно?) Постройте прямую, симметричную относительно оси

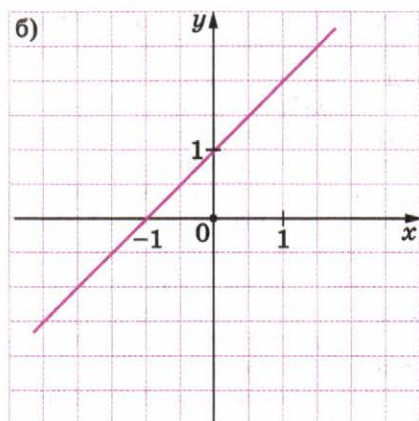
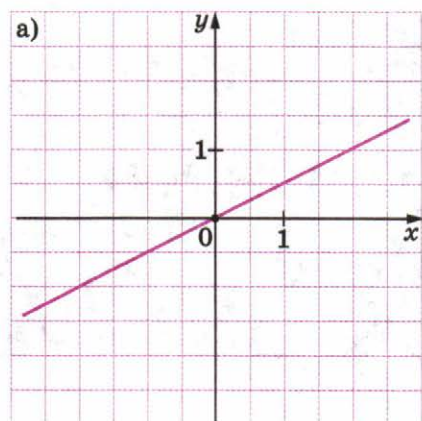


Рис. 5.32

абсцисс прямой $y = 2x$. Найдите зависимость, которой удовлетворяют координаты точек этой прямой.

- 485** Постройте множество точек плоскости, координаты которых связаны соотношением $y^2 = x^2$.

5.5 Ещё несколько важных графиков

1 Попробуем теперь рассмотреть более сложные зависимости, которые могут связывать абсциссы и ординаты точек плоскости, и посмотрим, как будут выглядеть соответствующие графики.

Пусть координаты связаны соотношением $y = x^2$. Чтобы построить график, вычислим сначала координаты нескольких его точек и занесём результаты в таблицу:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	0	1	1	4	4	9	9

Отметим соответствующие точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией (рис. 5.33). Получился красивый график, похожий на чашу. Этот график называется **параболой**.

Можно вычислить координаты других точек, удовлетворяющих равенству $y = x^2$,

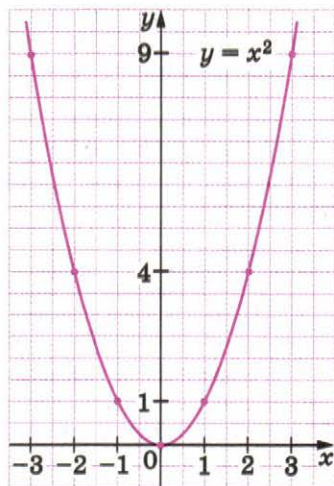


Рис. 5.33

и отметить их на координатной плоскости. Все они попадут на эту параболу.

Парабола расположена в верхней полуплоскости. Об этом можно было догадаться заранее, ещё до построения графика — по самому равенству $y = x^2$. Как вы знаете, квадрат любого числа положительный или равен нулю, т. е. при любом x выполняется неравенство $y \geq 0$.

Парабола симметрична относительно оси ординат, так как противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y . Ось симметрии делит параболу на две части, называемые **ветвями параболы**; эти ветви неограниченно уходят вверх. Точку $(0; 0)$, в которой сходятся ветви параболы, называют **вершиной параболы**. В вершине одна ветвь параболы плавно переходит в другую. И в этой же точке, как говорят математики, парабола *касается* оси абсцисс.

Разные параболы вы не раз могли наблюдать в жизни. Ведь именно по параболе, несколько искажённой сопротивлением воздуха, летит камень, мяч, снаряд и любое другое тело, брошенное под углом к горизонту.

2 Построим теперь график зависимости $y = x^3$.

Вычислим координаты нескольких точек, удовлетворяющих равенству $y = x^3$, и заполним таблицу:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	0	1	-1	8	-8	27	-27

Отметим найденные точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией. Эта линия называется **кубической параболой** (рис. 5.34).

Кубическая парабола симметрична относительно начала координат. Центр симметрии делит её на две ветви, расположенные в I и III координатных четвертях.

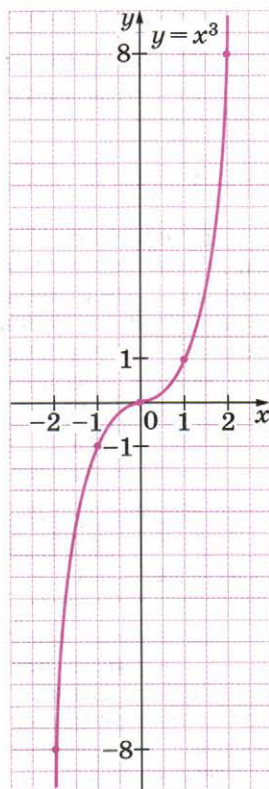
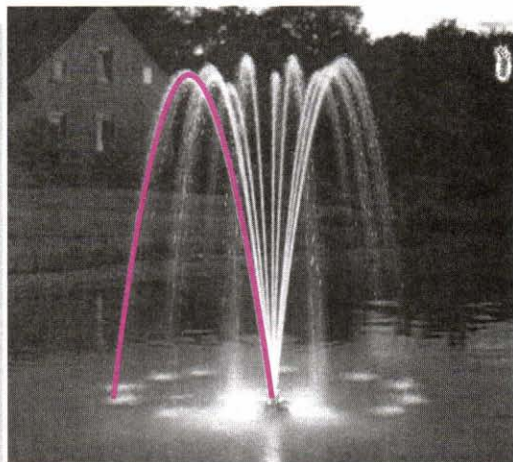


Рис. 5.34

З Графики зависимостей $y = x^2$ и $y = x^3$ мы построили по точкам, предварительно заполнив таблицы. Некоторые графики можно строить, используя уже знакомые графики.

Построим, например, график зависимости $y = |x|$.

Модуль положительного числа равен самому числу, модуль нуля равен нулю, т. е. также равен самому числу. Значит, при $x \geq 0$ верно равенство

$$|x| = x.$$

Модуль отрицательного числа равен противоположному числу. Значит, при $x < 0$

$$|x| = -x.$$

Поэтому условие $y = |x|$ можно заменить двумя:

- 1) $y = x$ при $x \geq 0$;
- 2) $y = -x$ при $x < 0$.

Обычно эти два условия записывают так:

$$y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0 \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

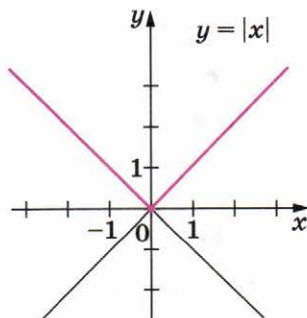
Зависимость $y = |x|$ на разных промежутках задана разными условиями, поэтому и график строится по частям.

При $x \geq 0$ график совпадает с известной нам прямой $y = x$. Понятно, что мы берём только те точки этой прямой, абсциссы которых неотрицательны, т. е. луч, расположенный в I координатном углу (рис. 5.35).

При $x < 0$ график совпадает с прямой $y = -x$. Здесь мы берём только те точки этой прямой, абсциссы которых отрицательны, т. е. луч, расположенный во II координатном углу (см. рис. 5.35).

Таким образом, график зависимости $y = |x|$ — это ломаная, образованная двумя лучами. На рисунке 5.35 она выделена цветом.

- Как называется график зависимости, заданный равенством $y = x^2$? Используя рисунок 5.33, опишите свойства этой линии.
- Точки A и B принадлежат параболе, заданной равенством $y = x^2$. Абсцисса точки A равна 5, абсцисса точки B равна -7 . Назовите ординаты этих точек.
- Используя рисунок 5.34, опишите свойства кубической параболы.
- Зависимость задана равенством $y = |x|$. Как иначе можно задать эту зависимость? Опираясь на рисунок 5.35, опишите её график.



■ Рис. 5.35

А

- 486** Из точек $A(0; 0)$, $B(-1; 1)$, $C(1; 1)$, $D(-1; -1)$, $E(-2; 4)$, $F(3; 27)$ выберите те, которые принадлежат:
- параболе $y = x^2$;
 - кубической параболы $y = x^3$;
 - графику зависимости $y = |x|$.
- 487** Постройте по точкам график зависимости:
- $y = -x^2$;
 - $y = -x^3$.
- 488** Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = x^2$, где:
- $-3 \leq x \leq 3$;
 - $-2 \leq x \leq 1$;
 - $x \leq 0$.
- 489** Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = x^3$, где:
- $-1 \leq x \leq 1$;
 - $x \geq 0$;
 - $x \leq 1$.
- 490** Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = |x|$, где:
- $x \leq 3$;
 - $x \geq -4$;
 - $-2 \leq x \leq 2$.
- 491** Известно, что $y = x^2 + 2x$. Составьте таблицу соответственных значений x и y и постройте по точкам график этой зависимости. Вы получили уже знакомую вам линию. Какую?
- 492** Множество точек на плоскости задано условиями:

$$y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Изобразите это множество точек на координатной плоскости. Какие из точек $(-1; 0)$, $(0,5; 0,5)$, $(1; 0)$, $(2; 2)$, $(-3; -3)$ принадлежат этому множеству?

- 493** Множество точек на плоскости задано условиями:

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Изобразите это множество точек на координатной плоскости.

Какие из точек $(0; 0)$, $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$, $(2; 4)$, $(-2; 4)$, $(3; 1)$ принадлежат этому множеству?

- 494** Постройте график зависимости, если известно, что:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ -x & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} -x & \text{при } x \geq 0 \\ x^3 & \text{при } x < 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } y &= \begin{cases} 3 & \text{при } x \geq 3 \\ x & \text{при } -3 < x < 3 \\ -3 & \text{при } x \leq -3; \end{cases} & \text{д) } y &= \begin{cases} 3 & \text{при } x \geq 3 \\ |x| & \text{при } -3 < x < 3 \\ 3 & \text{при } x \leq -3; \end{cases} \\ \text{г) } y &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \geq 0 \\ -x & \text{при } -2 < x < 0 \\ 2 & \text{при } x \leq -2; \end{cases} & \text{е) } y &= \begin{cases} 4 & \text{при } x \leq -2 \\ x^2 & \text{при } -2 < x < 2 \\ 4 & \text{при } x \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Б**■ АНАЛИЗИРУЕМ (495–496) ■**

495 В одной системе координат постройте параболу $y = x^2$ и прямую $y = -x$. Найдите координаты точек пересечения этих графиков. При каких значениях x парабола лежит выше прямой? ниже прямой?

496 Найдите координаты точек плоскости, в которых кубическая парабола $y = x^3$ пересекается с прямой $y = x$. Укажите промежутки значений x , в которых прямая расположена выше кубической параболы.

497 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= x^2 \text{ и } 1 \leq y \leq 9; & \text{в) } y &= |x| \text{ и } y \leq 3; \\ \text{б) } y &= x^3 \text{ и } -8 \leq y \leq 1; & \text{г) } y &= |x| \text{ и } y \geq 1. \end{aligned}$$

498 Постройте график зависимости:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 1 \\ 1 & \text{при } -1 < x < 1 \\ -x & \text{при } x \leq -1; \end{cases} & \text{б) } y &= \begin{cases} 4 & \text{при } x \geq 2 \\ x^2 & \text{при } 0 < x < 2 \\ -x & \text{при } x \leq 0; \end{cases} \\ \text{в) } y &= \begin{cases} x & \text{при } |x| \geq 1 \\ x^3 & \text{при } |x| < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

499 Найдите координаты общих точек графиков зависимостей $y = x^2$ и $y = |x|$.

500 Постройте параболу, симметричную параболе $y = x^2$ относительно оси абсцисс. Каким соотношением связаны координаты точек этой параболы?

501 Постройте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

$$\text{а) } x = y^2; \quad \text{б) } x = |y|.$$

5.6 Графики вокруг нас

1 Графический способ — один из самых удобных и наглядных способов представления и анализа информации.

Например, метеорологическая служба фиксирует изменение температуры в течение суток. Полученные данные можно проанализировать, представив их в виде таблицы:

Время суток t , ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура T , °C	3	0	-1	-3	-1	0	2	5	7	5	4	4	2

Однако гораздо удобнее провести исследование поведения температуры, представив эти же данные графически.

Перенесём данные таблицы на координатную плоскость; по оси абсцисс будем откладывать значения времени, а по оси ординат — значения температуры (рис. 5.36).

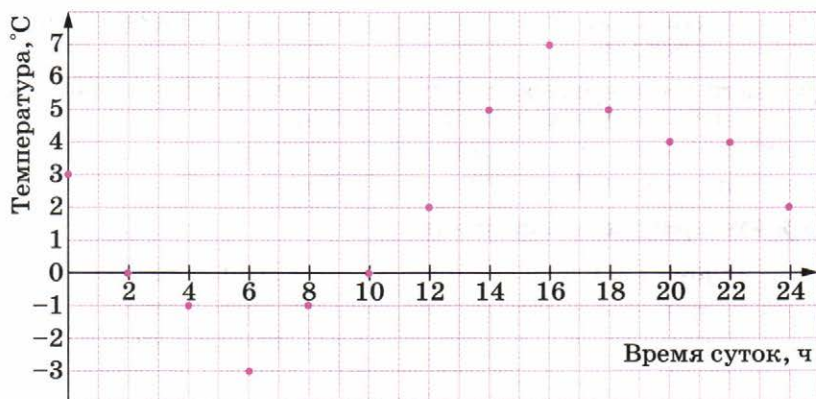


Рис. 5.36

В данной таблице замеры температуры представлены через каждые два часа. Обычно говорят так: таблица составлена с *шагом*, равным 2 ч. Можно получить более точные представления об изменении температуры в течение суток, уменьшая шаг таблицы. При этом на координатной плоскости мы будем получать всё больше и больше точек (рис. 5.37).

Все построенные таким образом точки намечают некоторую линию (рис. 5.38). Эту линию называют *графиком температуры*.

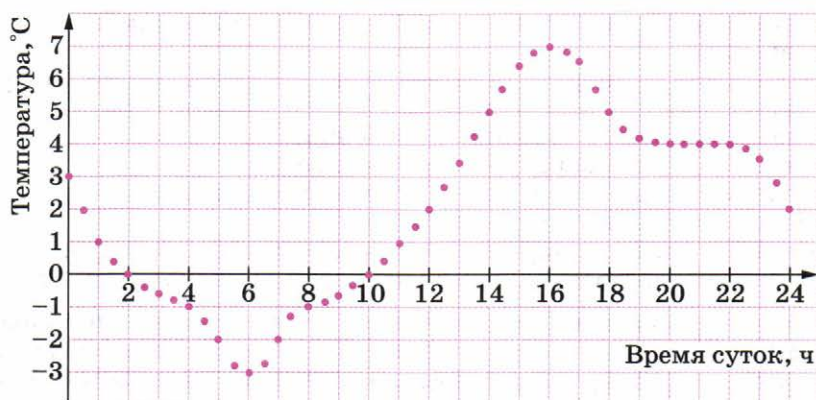


Рис. 5.37

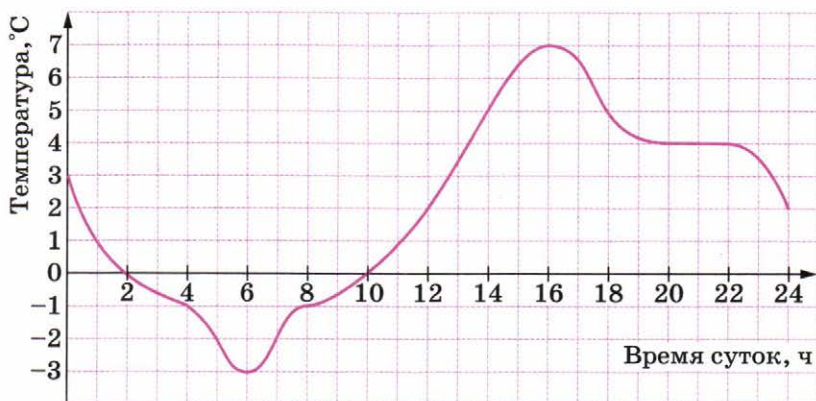


Рис. 5.38

Такие графики метеорологи получают с помощью специального прибора — термографа, отмечающего температуру на движущейся ленте или на экране дисплея (рис. 5.39).

График температуры даёт нам много полезной информации. Например, по графику легко узнать, когда температура была положительной, а когда отрицательной, когда она росла, а когда понижалась.

С 0 ч до 2 ч и после 10 ч температура была положительной, так как на этих промежутках график расположен выше оси абсцисс. С 2 ч до 10 ч температура



Рис. 5.39

была отрицательной, так как на этом промежутке график лежит ниже оси абсцисс.

С 6 ч до 16 ч температура росла, так как на этом промежутке график идёт вверх, а с 0 ч до 6 ч, с 16 ч до 20 ч и с 22 ч до 24 ч температура понижалась (график идёт вниз).

С 20 ч до 22 ч температура не менялась.

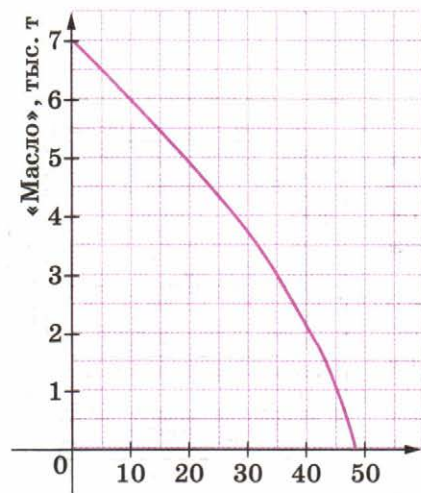
По графику видно, что самая высокая температура за сутки, была в 16 ч, а самая низкая — в 6 ч.

По графику можно получить и другую полезную информацию: например, когда температура менялась быстрее, а когда медленнее.

- 2 Используя показания сейсмографов — приборов, непрерывно фиксирующих колебания почвы и строящих специальные графики — *сейсмограммы*, геологи могут предсказывать приближение землетрясения или цунами. А врачи выявляют болезни сердца, изучая полученные с помощью кардиографа *кардиограммы* (рис. 5.40).



■ Рис. 5.40



«Пушки», тыс. шт.

Широко используются различные графики и в экономике. Есть известная поговорка «Чем больше пушек — тем меньше масла». Имеются в виду расходы на вооружение и на продовольствие; в этих словах отражён реально существующий в экономике закон.

Графически указанная зависимость может выглядеть примерно так, как показано на рисунке 5.41. Экономисты изображённый график называют *линией производственных возможностей*.

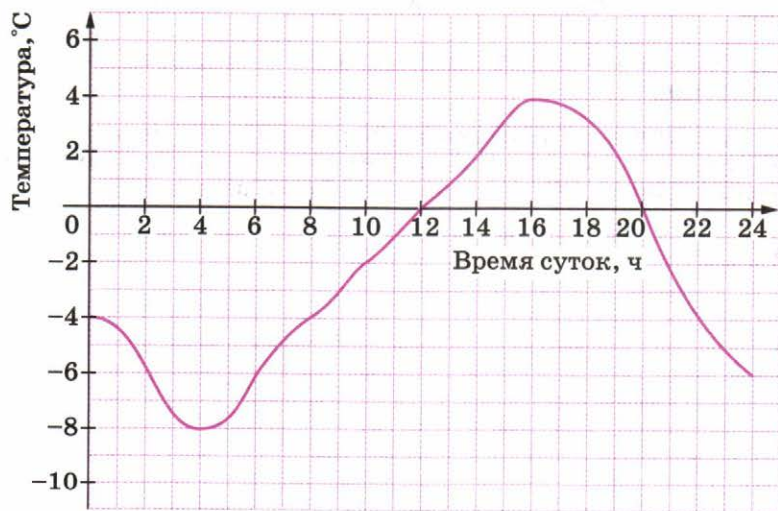
■ Рис. 5.41

- Рассмотрите график температуры на рисунке 5.38 и ответьте на вопросы:
- Какой была температура в 4 ч? в 12 ч?
 - В какое время суток температура равнялась 0° ?
 - Когда температура понижалась быстрее — с 2 до 4 ч или с 4 до 6 ч?
 - Определите наибольшую и наименьшую температуру в течение суток.
- Задайте соседу по парте свой вопрос по рисунку 5.40.

A

502 На рисунке 5.42 изображён график температуры воздуха в городе Лукошкино 19 октября. Используя график, ответьте на вопросы:

- В какое время суток температура была равна 4° ? 2° ? 0° ? -6° ?
- Когда в течение суток температура была положительной? отрицательной?
- Какова была минимальная и максимальная температура в этот день?
- Когда в этот день температура повышалась? понижалась?



■ Рис. 5.42

503 Отъехав от стоянки, водитель через некоторое время увидел внезапно выбежавшего на дорогу щенка, резко сбросил скорость, а затем продолжил движение, увеличивая скорость. На

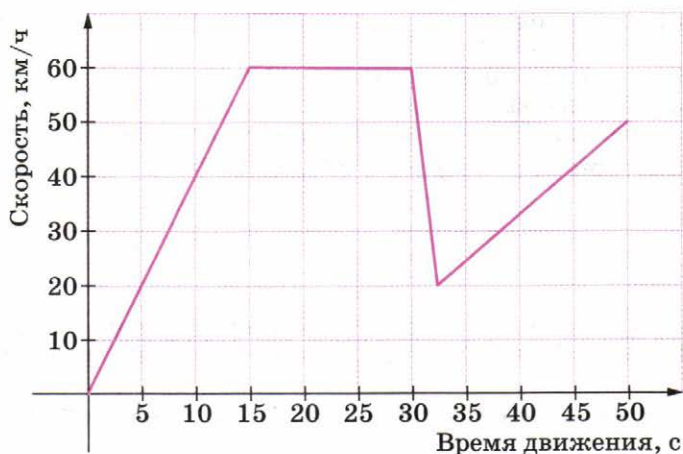


Рис. 5.43

рисунке 5.43 изображён график скорости движения автомобиля. С помощью графика ответьте на вопросы:

- Какова была наибольшая скорость автомобиля в течение первых 10 с движения?
- Сколько времени автомобиль двигался с постоянной скоростью?
- Через сколько секунд после начала движения водитель нажал на тормоз?

504 Турист поднялся из посёлка на вершину горы и затем вернулся обратно в посёлок. На рисунке 5.44 представлен график движения туриста. С помощью графика выясните:

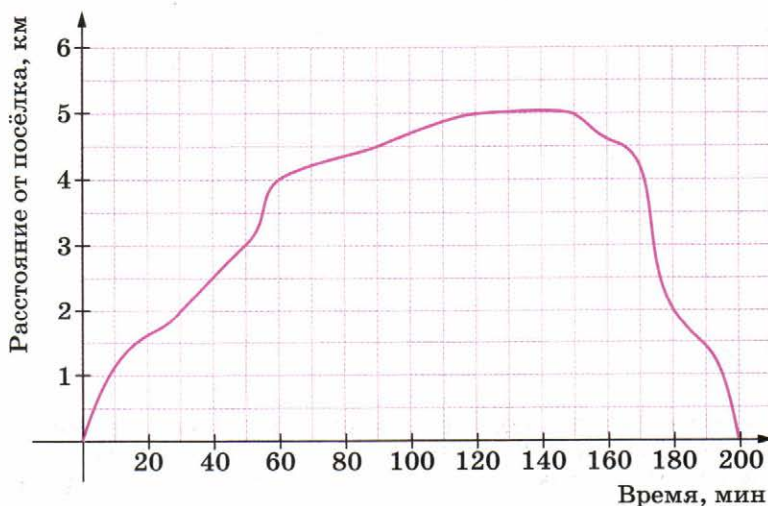
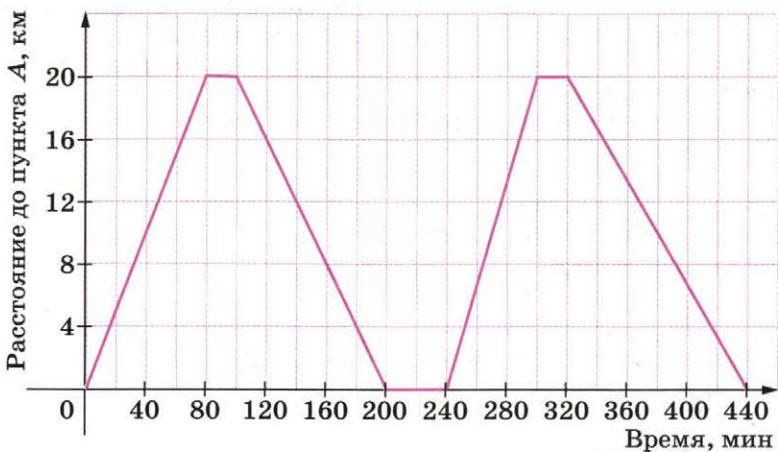


Рис. 5.44

- а) Сколько времени турист пробыл на вершине горы?
- б) За сколько минут турист прошёл первый километр подъёма и первый километр спуска?
- в) Сколько километров турист прошёл за первые полчаса пути? за следующий час пути?
- г) Через сколько времени от начала движения турист был в 2 км от посёлка?
- д) Какова была средняя скорость туриста (в км/ч) на подъёме? на спуске?

505 ■ АНАЛИЗИРУЕМ Паром дважды в сутки плывёт по озеру из пункта *A* в пункт *B* и возвращается обратно. На рисунке 5.45 показана зависимость расстояния между паромом и пунктом *A* от времени движения. С помощью графика определите:

- а) Сколько времени длилась стоянка парома между третьим и четвёртым рейсами?
- б) Какова была скорость парома при первом возвращении из пункта *B* в пункт *A*?
- в) В каком из четырёх рейсов паром проплыл свой путь быстрее всего?



■ Рис. 5.45

Б

506 На рисунке 5.46 изображён график роста тиража новой газеты за первые девять месяцев её существования. С помощью графика ответьте на вопросы:

- а) Каков был начальный тираж газеты в указанный период?

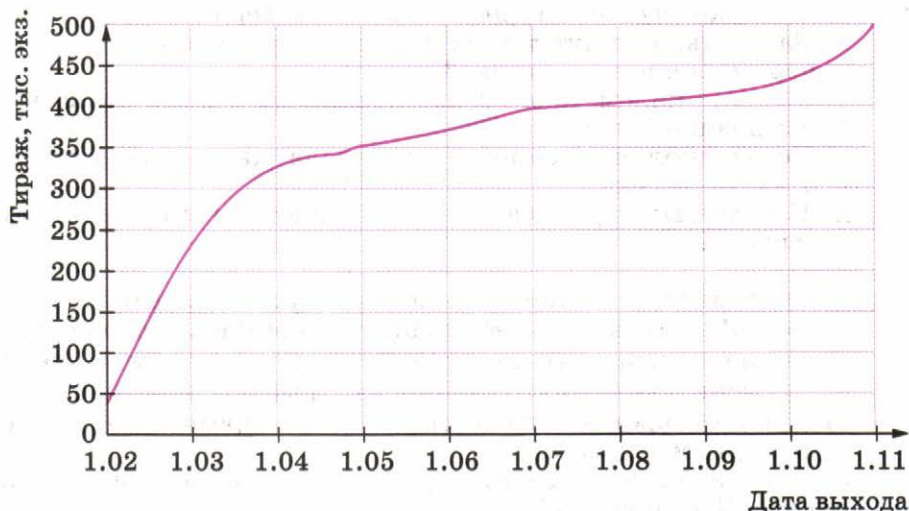


Рис. 5.46

- б) Когда примерно тираж газеты достиг 200 тыс. экземпляров? 250 тыс. экземпляров? 400 тыс. экземпляров?
 в) На сколько примерно процентов вырос тираж газеты за февраль? за весну?
 г) В каком месяце был самый быстрый рост тиража и в каком самый медленный?

507 ■ АНАЛИЗИРУЕМ Для определения возможностей спортсменов тренер секции лёгкой атлетики предложил Андрею, Борису и Вадиму бежать по шоссе «на износ». Графики их бега представлены на рисунке 5.47. Используя графики, ответьте на вопросы:

- а) Кто пробежал дальше всех?
 б) Кто бежал дольше всех?
 в) Сколько километров пробежал Вадим за первый час? Где в это время находились Андрей и Борис — впереди Вадима или позади?
 г) Сколько времени бежал Борис? Сколько километров он пробежал? Какова его средняя скорость?

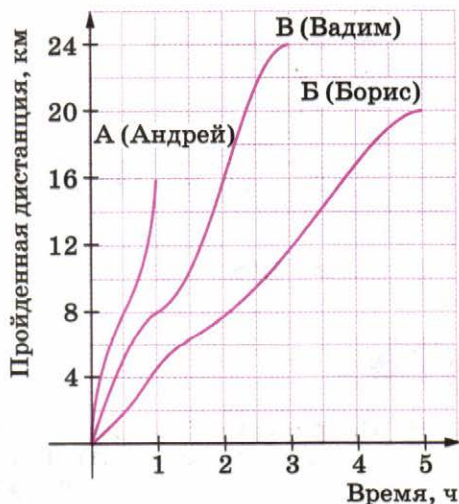


Рис. 5.47

- д) Кто бежал быстрее всех (с наибольшей средней скоростью)?
 е) Сколько километров пробежал Вадим, когда Борис пробежал 8 км?

508 На рисунке 5.48 изображены графики зависимости роста Анны и Бориса от их возраста. Используя графики, определите:

- а) Рост каждого из них при рождении, в 3 года, в 17 лет.
 б) В каком возрасте каждый из них достиг роста 120 см? 140 см? 180 см?
 в) Кто был выше в 3 года и на сколько?
 г) На сколько каждый из них вырос за первые 6 лет жизни? в период с 14 до 20 лет?

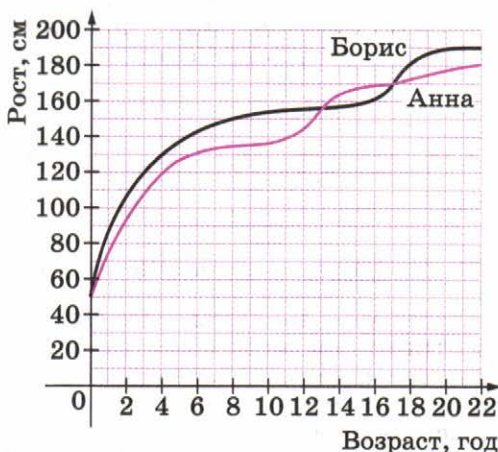


Рис. 5.48

509 В экономических исследованиях часто используется *кривая спроса* — график, который показывает, как зависит спрос на товар от его цены. В таблице представлено соотношение цены на 1 кг яблок и количества яблок, на которое при такой цене предъявлен спрос.

Цена 1 кг яблок, р.	4	6	8	10	12
Количество яблок, на которое предъявлен спрос, тыс. т.	10	7	4,5	2,5	1

Представив данные таблицы точками на координатной плоскости и соединив полученные точки плавной линией, начертите кривую спроса на яблоки.

510 В парламенте Страны Лилипутов, куда попадает Гулливер, знаменитый герой Дж. Свифта, представлены две партии: высококаблучники и низкокблучники. Всего в парламенте 25 мест. В таблице указано количество депутатских мест, которые получали высококаблучники на десяти последних выборах.

Выборы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество мест высококаблучников	9	11	13	15	12	10	6	8	10	14

- а) Составьте такую же таблицу для партии низкокаблучников.
 б) Представив данные соответствующей таблицы точками на координатной плоскости и соединив полученные точки, постройте «кривую популярности» высококаблучников. В той же системе координат постройте «кривую популярности» низкокаблучников. Сопоставьте эти кривые.

5.7 Графики зависимостей, заданных равенствами с модулями

(Для тех, кому интересно)

Вы уже знакомы с графиками зависимостей $y = |x|$ и $|y| = |x|$. Рассмотрите ещё несколько зависимостей, которые задаются равенствами, содержащими знак модуля, и постройте их графики. Если вы знаете, что такое модуль числа и как с ним работать, то вам это будет нетрудно.

Как, например, построить график зависимости, заданной равенством $y = |x| + x$? Прежде всего освободимся от знака модуля.

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и данное равенство примет вид $y = 2x$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и тогда данное равенство примет вид $y = 0$.

Таким образом,

$$y = \begin{cases} 2x & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Теперь понятно, что график надо строить по частям, отдельно в правой и в левой полуплоскости. Сделайте это самостоятельно.

- 511** Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

а) $y = |x| - x$; б) $y = |x| \cdot x$; в) $y = \frac{|x|}{x}$; г) $y = \frac{2x}{|x|}$.

Дополнительные задания

- Расстояние между точками координатной прямой

- 512** Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению или неравенству:

а) $|x - 4| = 2$, $|x - 4| < 2$, $|x - 4| > 2$;
 б) $|x + 3| = 4$, $|x + 3| < 4$, $|x + 3| > 4$.

- 513** Изобразите на координатной прямой множество точек, заданное неравенством:

а) $|x - 20| < 5$; б) $|x - 6| > 1$; в) $|x + 1,5| < 5$; г) $|x + 0,5| > 2,5$.

514 Найдите число x , если:

- а) $|x| = |x - 5|$; в) $|x - 2| = |x - 8|$;
 б) $|x| = |x + 14|$; г) $|x + 3| = |x - 7|$.

Образец. Найдём число x , если $|x + 2| = |x - 10|$.

Решение. Равенство $|x + 2| = |x - 10|$ можно прочитать так: расстояние от точки x до точки -2 равно расстоянию от точки x до точки 10 . Изобразим на координатной прямой числа -2 и 10 и найдём середину отрезка с концами в точках -2 и 10 . Получим, что $x = 4$.

515 Прочитайте неравенство, используя слово «расстояние», и найдите с помощью координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют этому неравенству:

- а) $|x| \geq |x - 1|$; б) $|x + 2| \leq |x - 2|$.

Множество точек на координатной плоскости

516 Постройте ломаную $ABCD$ по описанию её звеньев:

- а) $AB: x = -5$ и $|y| \leq 5$; б) $AB: x = -3$ и $-3 \leq y \leq 3$;
 $BC: y = x$ и $|x| \leq 5$; $BC: y = x$ и $-3 \leq x \leq 5$;
 $CD: y = 5$ и $0 \leq x \leq 5$; $CD: x = 5$ и $-5 \leq y \leq 5$.

517 Задайте с помощью неравенств множества точек координатной плоскости, изображённые на рисунке 5.49, а, б.

518 Прямоугольник задан условиями

$$1 \leq x \leq 3 \text{ и } 1 \leq y \leq 2.$$

Изобразите на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных этому прямоугольнику относительно:

- а) оси ординат;
 б) оси абсцисс;
 в) начала координат.

519 Опишите на алгебраическом языке множества точек координатной плоскости, изображённые на рисунке 5.50, а, б.

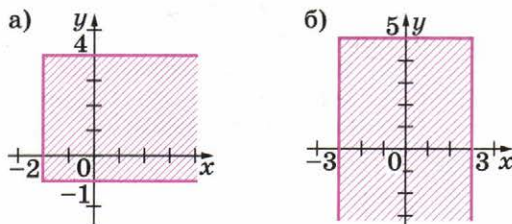


Рис. 5.49

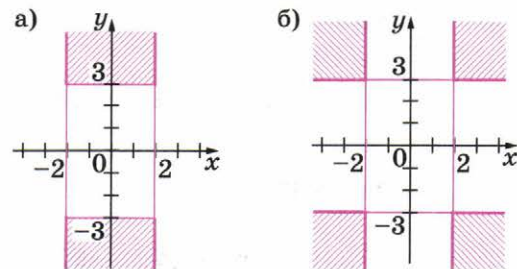


Рис. 5.50

- 520** У девочек одного из седьмых классов узнали их рост и вес. Затем каждой девочке поставили в соответствие точку на координатной плоскости, отложив по горизонтальной оси рост (в см), а по вертикальной — вес (в кг) (рис. 5.51). Для танцевальной студии нужны девочки не ниже 155 см и не выше 165 см, которые весят не более 45 кг. Сколько таких в классе?

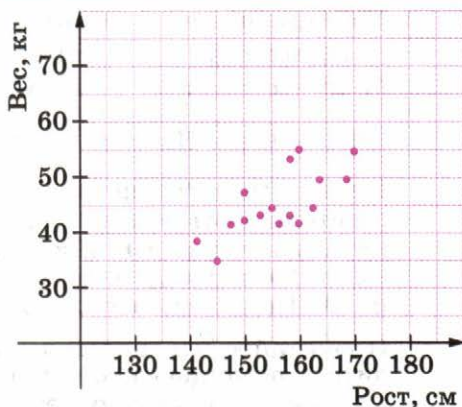


Рис. 5.51

Графики реальных зависимостей

- 521** Катер курсирует между пляжем и парком водных аттракционов, расположенным на расстоянии 3 км от пляжа. На рисунке 5.52 изображён график движения катера в первые 40 мин его работы. Используя график, ответьте на вопросы:
- Сколько остановок сделал катер в течение 40 мин? Какова длительность каждой остановки?
 - Сколько километров прошёл катер в первые 4 мин?
 - С какой скоростью шёл катер первые 6 мин?
 - С одинаковой ли скоростью шёл катер в рассматриваемый промежуток времени?

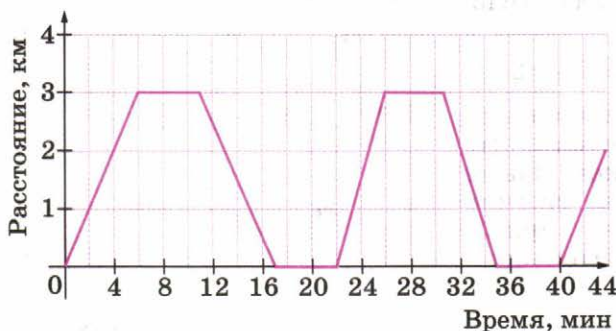


Рис. 5.52

АНАЛИЗИРУЕМ (522–523)

- 522** Лыжник во время тренировки пробежал дистанцию 3000 м по лыжне, проходящей по лесной просеке, длина которой 500 м.

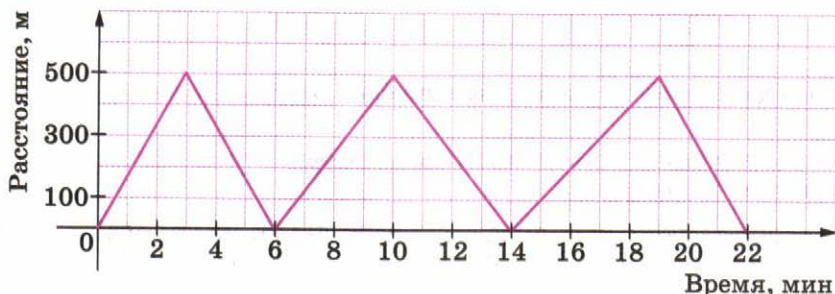


Рис. 5.53

График (рис. 5.53) показывает, как менялось во время движения расстояние между лыжником и местом старта. Используя график, ответьте на вопросы:

- За какое время лыжник прошёл всю дистанцию?
- Какова была скорость лыжника на третьем отрезке пути?
- На каком по счёту отрезке пути лыжник шёл медленнее всего? С какой скоростью?

523 Три спортсменки — Аня, Оля и Юлия — участвовали в кроссе на дистанции 1000 м. Они стартовали одновременно. Графики их бега показаны на рисунке 5.54. Используя графики, ответьте на вопросы:

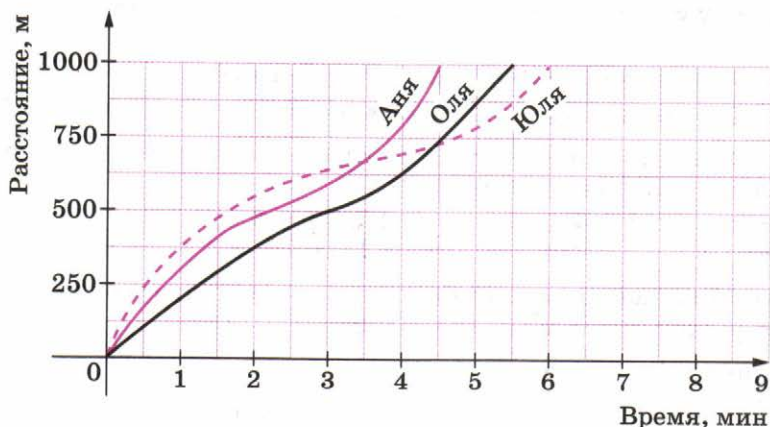


Рис. 5.54

- Сколько времени Юлия бежала первой?
- В какой момент Юлю догнала Оля?
- С какой скоростью бежала Оля первые две минуты?
- Какая спортсменка прибежала к финишу первой? С каким результатом?

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Назовите известные вам числовые промежутки и приведите соответствующие примеры.
- 2 На координатной прямой даны точки $A(14)$, $B(-6)$, $C(a)$. На каком расстоянии от точки 0 находится каждая из этих точек?
- 3 Запишите формулу расстояния между точками координатной прямой. По этой формуле найдите расстояние между точками $A(-10,4)$ и $B(2,3)$.
- 4 Каким равенством задаётся биссектриса I и III координатных углов?
- 5 Каким равенством задаётся биссектриса II и IV координатных углов?
- 6 Как называется график зависимости $y = x^2$? Укажите координаты нескольких точек, принадлежащих этому графику. Постройте этот график и опишите его свойства.
- 7 Изобразите на координатной плоскости график зависимости $y = x^3$.
- 8 Изобразите на координатной плоскости график зависимости $y = |x|$.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- 1 Изобразите на координатной прямой промежутки:
а) $x > 3$; б) $x \leq -1$; в) $-5 \leq x \leq 2$; г) $0,5 < x < 1,5$.
- 2 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:
а) $x = -2$; в) $x \leq 1$; д) $1,5 \leq y \leq 3,5$;
б) $y = 4$; г) $y \geq 0$; е) $-2 \leq x \leq 1$ и $2 \leq y \leq 4$.
- 3 Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $y = x^2$ и $-2 \leq x \leq 2$.
- 4 Постройте график зависимости:
а) $y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 1 \\ 1 & \text{при } x < 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \geq 0 \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$
- 5 На рисунке 5.55 изображён график температуры воздуха 1 апреля 2010 г. в городе N .
а) В какое время суток температура была равна 0° ?
б) Когда в течение суток температура была положительной?
в) Какова была максимальная температура в этот день?



Рис. 5.55

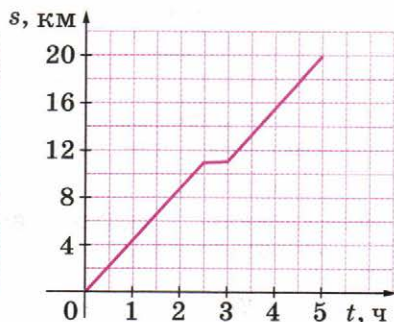


Рис. 5.56

- 6 На рисунке 5.56 изображён график движения туриста от турлагеря до станции. Используя график, ответьте на следующие вопросы:
- Сколько километров прошёл турист за первые 2 часа?
 - За сколько часов турист прошёл 15 км?
 - Сколько времени турист отдыхал?
 - Сколько всего километров прошёл турист?
 - Сколько всего часов шёл турист?

Проверьте себя (тест)

- 1 Поставьте в соответствие каждому промежутку его алгебраическое описание.

А)



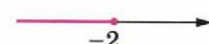
Б)



В)



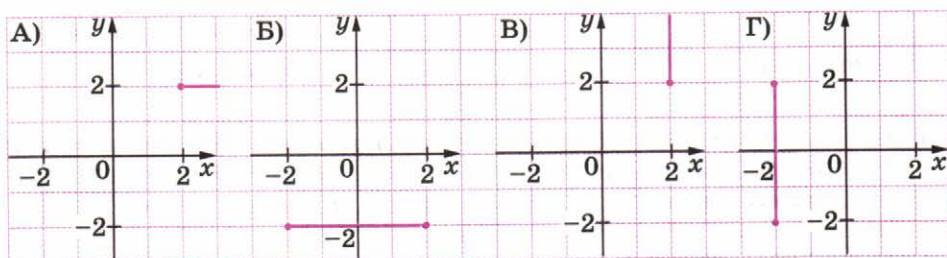
Г)



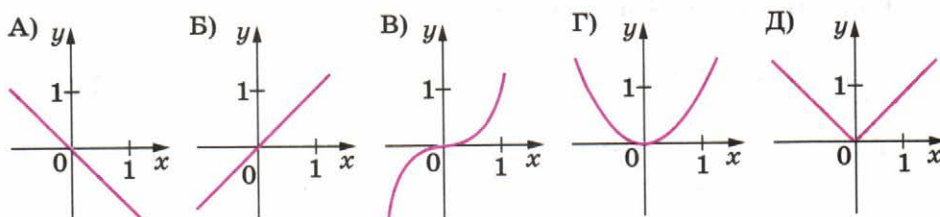
- $x \geq -2$
 - $x \leq -2$
 - $x \geq -6$
 - $x \leq -6$
- Укажите число, не принадлежащее промежутку $-0,25 < x < 0,55$.
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{1}{4}$
 - $-\frac{1}{3}$
 - $-\frac{1}{5}$
- На координатной прямой отмечены точки $A(-1,5)$ и $B(6)$. Найдите координату точки M , если известно, что $AM : MB = 1 : 2$.
- Установите соответствие между неравенствами, задающими один и тот же числовой промежуток и расположенными в верхней и в нижней строке.

А) $4 < x < 16$	Б) $-10 < x < 10$	В) $-8 < x < -2$
1) $ x < 10$	2) $ x + 5 < 3$	3) $ x - 10 < 6$

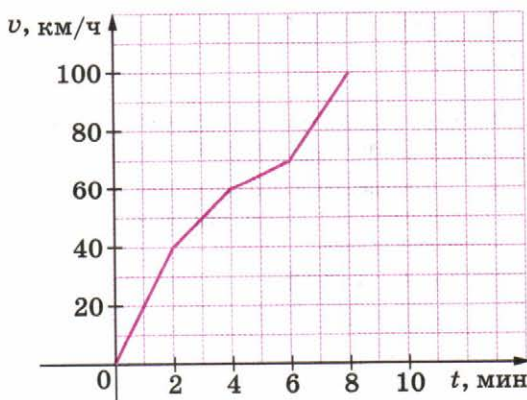
- 5 Каким равенством можно задать вертикальную прямую, проходящую через точку $M(-2; 6)$?
- 1) $x = -2$ 2) $x = 6$ 3) $y = -2$ 4) $y = 6$
- 6 Каким равенством можно задать горизонтальную прямую, проходящую через точку $M(a; b)$?
- 1) $x = a$ 2) $x = b$ 3) $y = a$ 4) $y = b$
- 7 Поставьте в соответствие каждому множеству точек его алгебраическое описание.



- 1) $x = 2$ и $y \geq 2$ 3) $y = -2$ и $|x| \leq 2$
 2) $y = 2$ и $x \geq 2$ 4) $x = -2$ и $|y| \leq 2$
- 8 Для каждого графика укажите его алгебраическое описание.



- 1) $y = x^3$ 2) $y = x^2$ 3) $y = x$ 4) $y = |x|$ 5) $y = -x$
- 9 На рисунке изображён график изменения скорости автомобиля. Определите, на каком промежутке времени скорость автомобиля росла быстрее.
- 1) на промежутке от 0 мин до 2 мин
 2) на промежутке от 2 мин до 4 мин
 3) на промежутке от 4 мин до 6 мин
 4) на промежутке от 6 мин до 8 мин



Свойства степени с натуральным показателем

Вам уже знакомо понятие степени с натуральным показателем. Например, 8^5 — это степень; $8^5 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$, т. е. это произведение пяти множителей, каждый из которых равен 8. Число 8 — основание степени, а число 5 — показатель степени. В этой главе вы познакомитесь со свойствами степени с натуральным показателем, на основе которых выполняются преобразования выражений, содержащих степени, а также вычисления. Полученные знания пригодятся вам в самых разных областях математики, в том числе в решении комбинаторных задач, которому посвящена вторая половина главы.

6.1 Произведение и частное степеней

- 1** Напомним, что определение степени с натуральным показателем включает в себя разъяснение смысла этого термина для двух случаев: когда показатель степени больше 1 и когда он равен 1.

Определение

Степенью числа a с натуральным показателем n , большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ множителей}}, \quad n > 1.$$

Степенью числа a с показателем, равным 1, называют само число a :

$$a^1 = a.$$

Рассмотрим некоторые свойства степени, которые часто используются при преобразовании выражений.

Возьмём произведение двух степеней с одинаковыми основаниями, например $a^3 a^4$. Это выражение легко представить в виде степени с тем же основанием:

$$a^3 a^4 = \underbrace{(aaa)}_{3 \text{ множ.}} \cdot \underbrace{(aaaa)}_{4 \text{ множ.}} = \underbrace{aaaaaaa}_{7 \text{ множ.}} = a^7.$$

Точно так же и в общем случае:

если a — любое число и m и n — любые натуральные числа, то

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Действительно,

$$a^m a^n = \underbrace{(aa \dots a)}_{m \text{ множ.}} \cdot \underbrace{(aa \dots a)}_{n \text{ множ.}} = \underbrace{aa \dots a}_{m+n \text{ множ.}} = a^{m+n}.$$

Таким образом,

при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются.

Это свойство распространяется на произведение трёх и более степеней.

Пример 1. Упростим выражение $y^5 y^4 y$.

$$y^5 y^4 y = y^{5+4+1} = y^{10}.$$

2 Рассмотрим теперь частное двух степеней с одинаковыми основаниями, например $\frac{a^9}{a^5}$. (Здесь a — число, не равное 0, так как на 0 делить нельзя.) Представим a^9 в виде произведения $a^5 a^4$, тогда дробь можно будет сократить на общий множитель a^5 :

$$\frac{a^9}{a^5} = \frac{a^5 a^4}{a^5} = a^4.$$

Точно так же и в общем случае:

если a — любое число, не равное 0, и m и n — любые натуральные числа, причём $m > n$, то

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Действительно, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n a^{m-n}}{a^n} = a^{m-n}$.

Таким образом,

при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Пример 2. Упростим выражение $\frac{x^{25}}{x^{20}}$.

$$\frac{x^{25}}{x^{20}} = x^{25-20} = x^5.$$

Пример 3. Сократим дробь $\frac{2a^8}{a^{12}c}$.

Числитель и знаменатель дроби можно разделить на общий множитель a^8 :

$$\frac{2a^8}{a^{12}c} = \frac{2}{a^{12-8}c} = \frac{2}{a^4c}.$$

- Сформулируйте определение степени с натуральным показателем и найдите значение выражения: а) 6^3 ; б) 10^5 ; в) 18^1 .
- На примере $a^{12} \cdot a^5$ проведите рассуждение, иллюстрирующее свойство произведения степеней с одинаковым основанием. Упростите выражение $a^{10} \cdot a \cdot a^7$.
- На примере $\frac{a^{12}}{a^4}$ проведите рассуждение, иллюстрирующее свойство частного степеней с одинаковым основанием. Упростите выражение $\frac{a^{20}}{a^5}$.

A

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (524–527)

524 Запишите в виде степени:

- а) x^3x^5 ; в) bb^4b^5 ; д) $xx^2x^3x^4$;
 б) m^3m ; г) cc^3c ; е) $n^2n^2n^2$.

525 Упростите:

- а) a^2b^3a ; в) xx^4y^2y ; д) $a^2c^4ac^{10}ac$;
 б) $x^3a^2xa^5$; г) $ab^2c^3a^4b^5c^6$; е) $x^2yzx^2y^5z$.

526 Выполните умножение:

- а) a^xa^y ; б) x^nx^5 ; в) yy^n ; г) c^nc^n .

527 Представьте в виде степени:

- а) $2^2 \cdot 2^{10}$; в) $5 \cdot 5^n \cdot 5^2$; д) $7^k \cdot 7^k \cdot 7^2$;
 б) $3^5 \cdot 3^2 \cdot 3$; г) $2^n \cdot 2^n \cdot 2$; е) $10^k \cdot 10^k \cdot 10^k$.

528 Упростите выражение:

- а) $(-x) \cdot x^2$; в) $(-x) \cdot (-x^2)$; д) $-x^2 \cdot (-x)^2 \cdot x$;
 б) $(-x)^2 \cdot x$; г) $(-x) \cdot (-x^2) \cdot (-x)$; е) $-(-x)^2 \cdot (-x) \cdot x$.

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (529–530)

529 Частное степеней замените степенью с тем же основанием:

- а) $\frac{m^9}{m^2}$; в) $\frac{c^5}{c}$; д) $\frac{a^{18}}{a^8}$; ж) $\frac{y^{30}}{y^{24}}$;
 б) $\frac{n^{10}}{n^9}$; г) $\frac{p^{10}}{p^2}$; е) $\frac{b^{43}}{b}$; з) $\frac{z^{34}}{z^{33}}$.

530 Выполните деление:

а) $a^7 : a^2$; в) $c^{30} : c^{10}$; д) $m^{50} : m^2$;
 б) $b^{10} : b^5$; г) $x^{12} : x^4$; е) $y^{100} : y^{10}$.

531 Какие из данных дробей равны выражению a^5 ?

1) $\frac{a^{10}}{a^2}$ 2) $\frac{a^{10}}{a^5}$ 3) $\frac{a^{10}}{b^2}$ 4) $\frac{a^{10}}{b^5}$

■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (532–533) ■

532 Чему равно значение выражения?

а) $\frac{10^{23}}{10^{20}}$; б) $\frac{2^{31}}{2^{27}}$; в) $\frac{10^{17}}{10^{20}}$; г) $\frac{6^{112}}{6^{114}}$; д) $\frac{5^4}{5^8}$; е) $\frac{2^{100}}{2^{105}}$.

533 Во сколько раз 6^{12} больше, чем 6^{10} ? 5^{118} меньше, чем 5^{121} ?

534 Выполните деление:

а) $\frac{x^n}{x^2}$; б) $x^{n+2} : x^2$; в) $\frac{x^{n+1}}{x^n}$; г) $x^n : x$.

535 Упростите выражение:

а) $\frac{x^5 \cdot x^8}{x^3}$; в) $\frac{m^{20}}{m^8 \cdot m^8}$; д) $\frac{b^3 \cdot b \cdot b^7}{b^5 \cdot b^4}$;
 б) $\frac{a^{90} \cdot a^{10}}{a^{50}}$; г) $\frac{y^{30}}{y^{15} \cdot y^{10}}$; е) $\frac{c^{12} \cdot c^2 \cdot c^6}{c \cdot c^{10} \cdot c^3}$.

536 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Вычислите:

а) $\frac{3^{10} \cdot 3^5}{3^{12}}$; б) $\frac{2^{17}}{2^9 \cdot 2^3}$; в) $\frac{5^2 \cdot 5 \cdot 5^{16}}{5^7 \cdot 5^{10}}$; г) $\frac{10^8 \cdot 10^6}{10^2 \cdot 10^5 \cdot 10^5}$.

■ РАССУЖДАЕМ (537–538) ■

537 При каком значении k верно равенство:

а) $a^8 \cdot a^k = a^{12}$; в) $x^{15} : x^k = x^{10}$; д) $25 \cdot 5^6 = 5^k$;
 б) $a^{20} = a^k \cdot a^{10}$; г) $x^k : x^8 = x^3$; е) $36 \cdot 6^k = 6^8$?

538 а) Зная, что $2^{10} = 1024$, найдите: 2^{12} ; 2^8 .

б) Зная, что $5^7 = 78\,125$, найдите: 5^5 ; 5^8 .

539 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Найдите значение выражения:

а) $(1,3 \cdot 10^3) \cdot (5 \cdot 10^2)$; в) $\frac{3,2 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^6}$;

б) $(2,4 \cdot 10^3) \cdot (3 \cdot 10^3)$; г) $\frac{56 \cdot 10^{27}}{2,8 \cdot 10^{25}}$.

540 Упростите произведение:

а) $3a^3 \cdot 7a^2$; в) $9x \cdot (-4x^5)$; д) $3c \cdot 5c^2 \cdot 7c^3$;
 б) $b^4 \cdot 5b^8$; г) $(-4a^2) \cdot (-5a)$; е) $y \cdot 4y^3 \cdot (-2y)$.

541 Выполните умножение:

- а) $4xy \cdot 3y^7$; г) $2p^2c^3 \cdot 3p^2c$; ж) $6a^5b^3 \cdot (-4ab^2)$;
 б) $2xy^2 \cdot 2xy^2$; д) $-m \cdot 4m^3n^4$; з) $-xy \cdot (-x^3y^2)$;
 в) $10a^2b \cdot 0,1ab^5$; е) $-c^2d \cdot 2c^3d$; и) $-2a^2 \cdot (-0,5ax^4)$.

542 Упростите выражение:

- а) $0,5x^3yz \cdot 4xyz$; в) $a^3xy \cdot 6ax^2y$; д) $-\frac{1}{2}bd \cdot (-4b^2c)$;
 б) $0,2ab^3c \cdot 16a^3bc^3$; г) $5ac^4 \cdot (-\frac{1}{5}c^2d^2)$; е) $(-0,1xy) \cdot (-10xz^2)$.

Сократите дробь (543—544).

543 а) $\frac{36a^6}{9a^4}$; б) $\frac{12x^7}{6x^3}$; в) $\frac{8y^4 \cdot 6y^2}{12y^3}$; г) $\frac{5c \cdot 8c^4}{4c^3}$; д) $\frac{4x \cdot 5x^4}{2x^5}$.

544 а) $\frac{xy^3}{y^9}$; б) $\frac{z^5c}{z^7}$; в) $\frac{a^2b}{a^3b}$; г) $\frac{3y^3}{xy^4}$; д) $\frac{2m^4}{m^5n}$.

545 Упростите выражение:

а) $\frac{32x^4y^5}{-8x^3y^3}$; б) $\frac{-18m^2n^3}{-36mn^3}$; в) $\frac{49c^4x^6}{7c^8x^8}$; г) $\frac{11x^{14}z^4}{-33x^{15}z^3}$.

546 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ Население Китая составляет $1,3 \cdot 10^9$ человек, а площадь его территории равна $9,6 \cdot 10^6$ км². Найдите среднее число жителей на 1 км².

Б

547 РАССУЖДАЕМ Сравните значения выражений:

- а) 10^{11} и $11 \cdot 10^{10}$; в) $(-4)^{18}$ и $-5 \cdot (-4)^{17}$;
 б) $5 \cdot 10^7$ и $0,5 \cdot 10^8$; г) $-4 \cdot (-3)^{32}$ и $(-3)^{33}$.

548 ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ Вычислите:

а) $\frac{5^7}{25 \cdot 125}$; б) $\frac{64 \cdot 32}{2^{10}}$; в) $\frac{16 \cdot 3^6}{81 \cdot 2^6}$.

549 АНАЛИЗИРУЕМ Дана таблица степеней числа 3:

$3^1 = 3$	$3^4 = 81$	$3^7 = 2187$	$3^{10} = 59\,049$
$3^2 = 9$	$3^5 = 243$	$3^8 = 6561$	$3^{11} = 177\,147$
$3^3 = 27$	$3^6 = 729$	$3^9 = 19\,683$	$3^{12} = 531\,441$

1) Пользуясь этой таблицей, вычислите:

а) $729 \cdot 81$; б) $2187 \cdot 243$; в) $\frac{177147}{729}$; г) $\frac{59049 \cdot 6561}{2187}$.

2) Составьте несколько выражений, значения которых можно найти, пользуясь таблицей степеней числа 3.

550 Представьте выражение в виде степени с основанием a :

- а) $a^k a^{2k}$; в) $aa^k a^{2-k}$; д) $aa^k a^{k-1}$;
 б) $a^{k+1} a^k$; г) $a^{k-1} a^2$; е) $a^{k+1} a^{k-1}$.

551 Представьте выражение в виде степени с основанием y :

- а) $y^{k+1} : y^{k-1}$; б) $y^{3k} : y^{2k-2}$; в) $y^{10k} : y^{5k-1}$; г) $y^{2k+2} : y^2$.

552 Представьте выражение в виде произведения двух или нескольких степеней:

- а) x^{n+m} ; б) y^{2n} ; в) a^{n+1} ; г) b^{2n+1} .

553 Представьте выражение в виде дроби:

- а) a^{m-n} ; б) x^{m-2} ; в) y^{10-m} ; г) b^{m-1} .

554 Упростите выражение:

- а) $\frac{x^n \cdot x^{20}}{x^{10}}$; б) $\frac{a^n \cdot a^{n+2}}{a^{2n}}$; в) $\frac{c^{8n}}{c^n \cdot c^{4n}}$; г) $\frac{y^{n+12}}{y^n \cdot y^{11}}$.

■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (555–556) ■

555 Представьте каждое из выражений в виде степени:

- а) $2 \cdot 2^3$, $2^5 + 2^5$, $2^n + 2^n$, $2^n \cdot 2^n$;
 б) $3 \cdot 3^4$, $3^6 + 3^6 + 3^6$, $3^n + 3^n + 3^n$, $3^n \cdot 3^n$.

556 Вычислите:

- а) $\frac{5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n}{5^n + 5^n + 5^n + 5^n}$; б) $\frac{\overbrace{100^n + 100^n + 100^n + \dots + 100^n}^{100 \text{ слагаемых}}}{\underbrace{100^n + 100^n + 100^n + \dots + 100^n}_{90 \text{ слагаемых}}}$.

6.2 Степень степени, произведения и дроби

■ Рассмотрим выражение $(a^2)^4$. Оно представляет собой степень с основанием a^2 . Поэтому

$$(a^2)^4 = \underbrace{a^2 a^2 a^2 a^2}_{4 \text{ множ.}} = a^{\overbrace{2+2+2+2}^{4 \text{ слаг.}}} = a^{2 \cdot 4} = a^8.$$

Точно так же и в общем случае:

если a — любое число и m и n — любые натуральные числа, то

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Докажем это:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \dots a^m}_{n \text{ множителей}} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \text{ слагаемых}}} = a^{mn}.$$

Итак,

при возведении степени в степень показатели перемножают.

Пример 1. Упростим выражение $(a^5)^2$.

$$(a^5)^2 = a^{5 \cdot 2} = a^{10}.$$

2. Выясним теперь, как можно преобразовать степень произведения, например выражение $(ab)^3$:

$$(ab)^3 = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab)}_{3 \text{ множителя}} = \underbrace{(aaa)}_{3 \text{ множ.}} \cdot \underbrace{(bbb)}_{3 \text{ множ.}} = a^3 b^3.$$

В общем случае:

если a и b — любые числа и n — любое натуральное число, то

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Докажем это:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}_{n \text{ множителей}} = \underbrace{(aa \dots a)}_{n \text{ множ.}} \cdot \underbrace{(bb \dots b)}_{n \text{ множ.}} = a^n b^n.$$

Итак,

при возведении произведения в степень возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

Это свойство справедливо для произведения любого числа множителей.

Пример 2. Преобразуем выражение $(-2xy^2)^3$.

$$(-2xy^2)^3 = (-2)^3 x^3 (y^2)^3 = -8x^3 y^6.$$

3. Рассмотрим степень дроби. Возьмём, например, выражение $\left(\frac{a}{b}\right)^3$. По определению степени

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}}_{3 \text{ множ.}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a}^{3 \text{ множ.}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b}_{3 \text{ множ.}}} = \frac{a^3}{b^3}.$$

В общем случае:

если a и b — любые числа, причём $b \neq 0$, и n — любое натуральное число, то

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ множ.}} = \frac{\overbrace{aa \dots a}^{n \text{ множ.}}}{\underbrace{bb \dots b}_{n \text{ множ.}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Итак,

при возведении дроби в степень возводят в эту степень отдельно её числитель и знаменатель.

Пример 3. Преобразуем выражение $\left(-\frac{2}{x}\right)^3$.

$$\left(-\frac{2}{x}\right)^3 = -\left(\frac{2}{x}\right)^3 = -\frac{2^3}{x^3} = -\frac{8}{x^3}.$$

- На примере $(a^6)^5$ проведите рассуждение, иллюстрирующее равенство $(a^m)^n = a^{mn}$. Упростите выражение $(a^{10})^2$.
- На примере $(ab)^6$ проведите рассуждение, иллюстрирующее равенство $(ab)^n = a^n b^n$. Возведите в степень $(a^{10})^2$. Вычислите $0,5^5 \cdot 20^5$.
- На примере $\left(\frac{a}{b}\right)^6$ проведите рассуждение, иллюстрирующее равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Возведите в степень $\left(\frac{a}{3}\right)^4$. Вычислите $\frac{24^5}{12^5}$.
- Упростите выражение $\left(-\frac{2}{a}\right)^5$ (в качестве образца используйте пример 3).

А

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (557–559)

557 Выполните действия:

- | | | | |
|-------------------|----------------------|-------------------|------------------|
| а) $(y^5)^3$; | в) $(n^8)^3$; | д) $2(a^3)^5$; | ж) $-4(y^4)^2$; |
| б) $(c^{12})^2$; | г) $(b^{10})^{10}$; | е) $0,3(x^2)^7$; | з) $-(c^6)^2$. |

558 Возведите в квадрат и в куб выражение:

- а) 2^2 , $(-2)^2$, -2^2 ; б) 2^3 , $(-2)^3$, -2^3 .

559 Представьте выражение в виде степени с основанием n :

- а) $n^5 n^2$, $n^5 : n^2$, $(n^5)^2$, $(n^2)^5$;
 б) $(n^k)^2$, $n^k n^2$, $n^k : n^2$, $(n^2)^k$.

560 Упростите выражение:

а) $a(a^2)^3$; в) $c^2c^5(c^2)^5$; д) $(k^{10}k^2)^3$; ж) $\left(\frac{x^7}{x^2}\right)^5$;

б) $(y^3)^4y^4$; г) $(x^4x)^5$; е) $\frac{(a^2)^{10}}{a^{15}}$; з) $\frac{y^{10}}{(y^2)^4}$.

561 Представьте a^{30} в виде степени с основанием:

а) a^2 ; б) a^3 ; в) a^5 ; г) a^{10} .

562 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Представьте в виде степени с основанием 2 и, если возможно, с основанием -2:

а) 8^2 ; б) 16^3 ; в) 32^3 ; г) 8^{11} .

563 Выполните действия:

а) $(x^n)^m$, $(x^n)^n$, $x^n x^n$; б) $x^2(x^3)^4$, $x^n(x^3)^n$, $(x^n x^3)^3$.

564 ■ РАССУЖДАЕМ ■ При каком значении k верно равенство:

а) $y^k \cdot y^2 = y^{12}$, $(y^k)^2 = y^{12}$; б) $(a^5)^k = a^{20}$, $a^5 \cdot a^k = a^{20}$?

565 ■ ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ ■ Возведите в степень:

а) $(xy)^4$; в) $(-10a)^3$; д) $(-cd)^2$; ж) $(-2ac)^4$;

б) $(5n)^2$; г) $(3ax)^3$; е) $(-xyz)^3$; з) $\left(\frac{1}{5}xyz\right)^3$.

566 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Вычислите:

а) $5^4 \cdot 2^4$; б) $25^3 \cdot 4^3$; в) $0,2^8 \cdot 5^8$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$.

567 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Какое выражение должно быть записано в скобках:

а) $(\dots)^3 = 8x^3$; в) $(\dots)^3 = -27y^3$; д) $0,25a^6 = (\dots)^2$;

б) $(\dots)^2 = 81a^2$; г) $(\dots)^4 = 16c^4$; е) $-\frac{1}{8}b^6 = (\dots)^3$?

568 Выполните действия:

а) $(ab^2)^3$; в) $(2m^3)^2$; д) $(-10a^3)^3$; ж) $(-2a^2x)^5$;

б) $(-x^2y)^4$; г) $(4x^5)^2$; е) $(-6c^3)^2$; з) $(3ac^4)^4$.

569 Возведите в квадрат и в куб выражение:

а) $5c^5$; б) $-0,1y^4$; в) $-ab^2$; г) $\frac{1}{3}a^3b$.

570 Выполните возведение в степень:

а) $((x^2)^3)^2$; б) $(-(-x)^2)^3$; в) $(-(-x)^3)^2$; г) $-((-x)^3)^2$.

571 Какое из выражений нельзя представить ни в виде квадрата, ни в виде куба?

- 1) $-27a^{12}b^6$ 2) $a^{18}b^{24}$ 3) $-25a^8b^{10}$ 4) $0,04a^{20}b^6$

572 ■ ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ ■ Выполните возведение в степень:

- а) $\left(\frac{x}{y}\right)^{10}$; б) $\left(\frac{a}{7}\right)^2$; в) $\left(\frac{2}{c}\right)^4$; г) $\left(-\frac{1}{c}\right)^4$; д) $\left(-\frac{x}{3}\right)^3$.

573 Возведите дробь в степень:

- а) $\left(\frac{2x}{5}\right)^2$; в) $\left(\frac{3}{2a}\right)^3$; д) $\left(-\frac{1}{ab}\right)^2$; ж) $\left(-\frac{ab}{c}\right)^5$;
б) $\left(\frac{1}{x^4}\right)^5$; г) $\left(-\frac{y^2}{3}\right)^3$; е) $\left(\frac{x^2y}{2}\right)^4$; з) $\left(-\frac{3a}{4b}\right)^2$.

574 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Вычислите:

- а) $\frac{10^3}{2^3}$; в) $100^4 : 50^4$; д) $\frac{6^6}{3^6}$; ж) $7^3 : 14^3$;
б) $8^{12} : 2^{30}$; г) $25^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6$; е) $9^5 : 3^9$; з) $16^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8$.

Упростите (575–577).

- 575** а) $3x \cdot (2x)^3$; г) $(x^2y)^3 \cdot (-x)$; ж) $-x \cdot (x^2y)^4$;
б) $4b \cdot (3b)^3$; д) $2y \cdot (-4y)^2$; з) $10a \cdot (10a)^3$;
в) $-2a \cdot (ab)^2$; е) $(-b)^3 \cdot 5ab$; и) $(-2m^3)^2 \cdot 5mn$.

- 576** а) $(a^2b)^2 \cdot (ab^2)^3$; г) $(-yz)^2 \cdot (2yz)^3 \cdot 0,5z$;
б) $(x^3y)^3 \cdot (xy^2)^3$; д) $((-0,1a^4b)^2)^3$;
в) $\left(-\frac{1}{2}m^2n\right)^2 \cdot (4mn^3)^2$; е) $-0,01c^3(-10ac^2)^2$.

- 577** а) $\frac{(2ab)^2}{4ab^3}$; в) $\frac{-81b^6c^3}{(3b^2c)^4}$; д) $\frac{-9(a^2c^3)^3}{(3a^3c^2)^3}$;
б) $\frac{24x^4y^3}{(2xy)^3}$; г) $\frac{(2a^2c^5)^2}{-(4a^2c^2)^3}$; е) $\frac{(x^2)^3(y^2)^2}{(x^3y^3)^3}$.

578 ■ РАССУЖДАЕМ ■ а) Докажите, что если сторону квадрата увеличить в 10 раз, то его площадь увеличится в 100 раз.

б) Во сколько раз увеличится объём куба, если его ребро увеличить в n раз?

Б**ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (579–580)****579** Вычислите:

$$\text{а) } \frac{5^{12} \cdot (5^4)^2}{(5^5)^4}; \quad \text{б) } \frac{2^6 \cdot (2^3)^5}{64^4}; \quad \text{в) } \frac{(3^3)^2 \cdot 27}{81^2}; \quad \text{г) } \frac{25^6}{(5^3)^3 \cdot 125}.$$

580 Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \frac{5^2 \cdot 2^4}{10^4}; \quad \text{б) } \frac{4^3 \cdot 3^8}{6^7}; \quad \text{в) } \frac{27^3 \cdot 25^5}{15^8}; \quad \text{г) } \frac{(125 \cdot 49)^3}{35^6}.$$

581 **ИЩЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ** Вычислите:

$$\text{а) } 0,25^{40} \cdot 4^{42}; \quad \text{б) } 2^{100} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{103}; \quad \text{в) } \left(\frac{3}{4}\right)^{50} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{49}; \quad \text{г) } \left(-\frac{2}{3}\right)^{24} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{23}.$$

582 **РАССУЖДАЕМ** Сравните:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 3^{10} \cdot 5^8 \text{ и } 15^9; & \text{в) } 81^{10} \text{ и } 2^{20} \cdot 5^{20}; \\ \text{б) } 6^{18} \text{ и } 2^{20} \cdot 3^{16}; & \text{г) } 49^{15} \text{ и } 2^{30} \cdot 3^{30}. \end{array}$$

583 **ИЩЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ** Значение какого выражения больше: а) 5^{20} или 55^{10} ; б) 33^{15} или 3^{30} ; в) 10^{30} или 1010^{10} ; г) 10001^5 или 100^{10} ?**584** Представьте в виде степени:

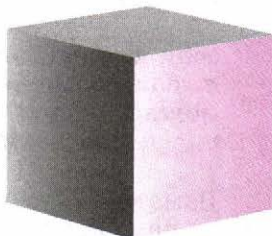
$$\text{а) } 4^{2k} \cdot 8^k; \quad \text{б) } 6^{k-1} \cdot 2^{k+1} \cdot 3^{k+1}; \quad \text{в) } 27^{k+1} \cdot 9^{k-1}; \quad \text{г) } 10^k \cdot 25^k \cdot 2^{2k}.$$

585 **РАССУЖДАЕМ** При каких значениях x выполняется равенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 2^{x+4} = 64, & 2^x \cdot 2^3 = 64, \quad (2^x)^3 = 64; \\ \text{б) } 10^{3x+1} = 10\,000, & 10^x \cdot 10^{x+1} = 100\,000, \quad (10^{x+1})^2 = 1\,000\,000? \end{array}$$

586 **ИССЛЕДУЕМ** Имеются кубики с ребром, равным 3 единицам, 4 единицам, 5 единицам и т. д. Каждый кубик покрасили и разрезали на единичные кубики. Заполните таблицу, ответив для каждого случая на вопросы:

- 1) Сколько получилось единичных кубиков?
- 2) Сколько кубиков, у которых покрашено три грани?
- 3) Сколько кубиков, у которых покрашено две грани?



- 4) Сколько кубиков, у которых покрашена одна грань?
 5) Сколько получилось непокрашенных кубиков?

Длина стороны, ед.	Число единичных кубиков	Число кубиков, у которых			
		покрашено 3 грани	покрашено 2 грани	покрашена 1 грань	нет покрашенных граней
3					
4					
5					
6					
...					
n					

6.3 Решение комбинаторных задач

1 При решении комбинаторных задач приходится отвечать на вопросы типа: «Сколькими способами?», «Сколько существует вариантов?». Вам уже приходилось решать такие задачи. Рассмотрим ещё несколько примеров.

Пример 1. Сколько существует различных вариантов кода дверного замка, если этот код состоит из двух цифр?

Первой в коде может стоять любая из десяти цифр. При каждом выборе первой цифры на второе место также можно поставить любую из десяти цифр. Значит, всего будет $10 \cdot 10 = 10^2$ вариантов кода.

Пусть теперь ситуация та же, но цифры кода должны быть разными. Сколько тогда существует вариантов кода?

Как и прежде, первой в коде может быть любая из десяти цифр. Но вторая цифра уже не может совпадать с первой. Поэтому для каждого выбора первой цифры остаётся девять способов выбрать вторую цифру. Значит, всего будет $10 \cdot 9 = 90$ вариантов кода.

Решение этих задач основано на так называемом **правиле умножения**. В общем виде это правило можно сформулировать так:

если первый элемент некоторой пары можно выбрать m способами и для каждого из этих способов второй элемент можно выбрать n способами, то эту пару можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Заметим, что правило умножения распространяется и на выбор более чем двух элементов. Изменим, например, условие задачи

с кодами: пусть требуется найти число кодов, составленных не из двух, а из трёх различных цифр. Понятно, что для каждого набора первых двух цифр остаётся восемь вариантов выбора третьей цифры. Значит, в этом случае всего будет $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ вариантов кода.

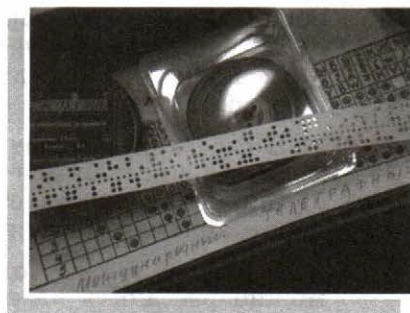
2 Правило умножения очень полезно при решении многих комбинаторных задач, однако его нельзя применять механически, не задумываясь над смыслом и вопросом задачи.

Пример 2. В турнире участвовало 16 шахматистов, причём каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?

В каждой партии встречаются два шахматиста. Первым из них может оказаться любой из 16 участников турнира, а вторым — любой из 15 оставшихся. Рассуждая, как в предыдущих примерах, можно подумать, что всего было сыграно $16 \cdot 15 = 240$ партий.

Однако при таком подсчёте каждая партия оказалась сосчитана дважды: один раз при подсчёте партий, сыгранных первым игроком, и другой раз при подсчёте партий второго игрока. Значит, на самом деле партий было сыграно вдвое меньше, т. е. число партий должно быть сосчитано так: $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$.

Пример 3. При передаче сообщений по телеграфу использовалась азбука Морзе. В этой азбуке каждая буква передаётся с помощью точек и тире. Например, буква Е закодирована точкой, а буква Т — тире. Понятно, что, чем короче последовательность знаков, обозначающая букву, тем лучше. Можно ли обойтись последовательностями не более чем в 4 знака, чтобы закодировать все буквы русского алфавита?



С помощью одного знака — точки или тире — можно закодировать 2 буквы. После первого знака опять можно поставить точку или тире. Значит, с помощью двух знаков можно закодировать $2 \cdot 2 = 4$ буквы. Из каждой последовательности из двух знаков получаются ещё две приписыванием точки или тире, т. е. тремя знаками можно закодировать $4 \cdot 2 = 8$ букв. С помощью четырёх знаков (точек и тире) можно закодировать $8 \cdot 2 = 16$ букв.

Итак, последовательностями из одного, двух, трёх или четырёх знаков (точек и тире) можно закодировать $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ букв. А в русском алфавите 33 буквы, значит, придётся использовать последовательности из пяти знаков.

- Каким будет ответ задачи из примера 1, если:
 - а) первой цифрой кода не может быть 0;
 - б) код должен оканчиваться цифрой 5 или 6;
 - в) первая цифра кода чётная, а вторая – нечётная?
- Какие из данных ниже задач аналогичны той, что описана в примере 2?
 - а) В спартакиаде приняли участие 7 боксёров, причём каждый с каждым провёл по одному бою. Сколько всего боёв было проведено?
 - б) На деловую встречу пришли 6 бизнесменов, и каждый с каждым обменялись рукопожатием. Сколько всего было сделано рукопожатий?
 - в) Четыре подруги каждая с каждой обменялись sms-сообщениями. Сколько всего было отправлено сообщений?
 - г) Пять государств установили друг с другом дипломатические отношения, при этом каждое с каждым обменялось послами. Сколько всего послов было направлено?
 - д) Четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, соединили попарно отрезками. Сколько всего отрезков было проведено?

А

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (587–589)

- 587** а) На почте продаётся 40 разных конвертов и 25 разных марок. Сколько есть вариантов покупки конверта с маркой?
 б) В театральном кафе предлагают три вида бутербродов, конфеты пяти сортов и два вида сока. Сколькими способами можно выбрать набор из бутерброда, конфеты и сока?
- 588** а) В забеге участвуют шесть мальчиков. Сколькими способами могут распределиться два первых места?
 б) Сколько существует вариантов выбора спикера и вице-спикера парламента, если всего в парламенте 101 депутат?
- 589** а) В классе десять одноместных парт. Сколькими способами можно рассадить на них трёх школьников?
 б) В пассажирском поезде девять вагонов. Сколькими способами можно посадить в этот поезд четырёх пассажиров, если требуется, чтобы все они ехали в разных вагонах?
- 590** Сколько существует четырёхзначных чисел, составленных из нечётных цифр? из чётных цифр? из четырёх разных цифр?
- 591** Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 2? на 5? на 10?

АНАЛИЗИРУЕМ (592–593)

- 592** а) В чемпионате по настольному теннису участвовало 40 спортсменов, и каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько всего сыграно партий?
 б) На официальном приёме 50 человек обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано рукопожатий?

в) В некоторой стране 25 городов, и каждые два соединены авиалинией. Сколько всего авиалиний в стране?

593 В конференции участвовало 20 человек, и каждый с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего карточек понадобилось?

594 ■ ИЩЕМ ИНФОРМАЦИЮ ■ Выскажите предположение, какие буквы русского алфавита в азбуке Морзе кодируются последовательностью из пяти знаков. Найдите азбуку Морзе в Интернете или в литературе и проверьте ваше предположение.



Б

595 Монету подбрасывают 5 раз подряд и каждый раз записывают, что выпало — орёл или решка. Сколько разных последовательностей из орлов и решек может при этом получиться?

596 В компьютере каждый символ кодируется последовательностью, состоящей из восьми цифр — нулей и единиц. Например, символ «пробел» закодирован так: 00101000. Какое наибольшее число символов может быть таким образом закодировано?

597 Сколько сигналов можно поднять на мачте, если имеется четыре разных флага и каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флагов? (Сигналы, составленные из флагов, взятых в разном порядке, считаются различными.)

598 ■ РАССУЖДАЕМ ■ В латинском алфавите 26 букв. Будем считать словом любую последовательность, состоящую не более чем из пяти букв. Сколько всего таких слов?

6.4 Перестановки

1 Задача. В комбинаторных задачах часто ставится вопрос о том, сколькими способами можно расположить в ряд, или, как говорят математики, *упорядочить*, все элементы некоторого множества. Вот пример такой задачи:

В турнире четверо участников. Сколькими способами могут распределиться места между ними?

Будем рассуждать в соответствии с правилом умножения. Первое место может занять любой из четырёх участников. При этом второе место может занять любой из трёх оставшихся, третье — любой из двух оставшихся, а на четвёртом месте останется последний участник. Значит, места между участниками могут быть распределены $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами.

Каждое расположение элементов множества в определённом порядке называют **перестановкой**. Решив задачу, мы фактически подсчитали число перестановок для множества из четырёх элементов. Рассуждая точно так же, можно показать, что для множества из пяти элементов число перестановок равно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, а для множества из десяти элементов это число равно $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Вообще если множество содержит n элементов, то число перестановок равно произведению $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Множители в этом произведении можно записать в обратном порядке:

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n.$$

Такие произведения бывают очень длинными и часто выражаются огромными числами. Однако в математике есть специальный символ для их обозначения. *Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначают $n!$* ; читают: « n факториал». Значение выражения $n!$ можно найти для любого натурального числа n (при этом считают, что $1! = 1$).

- 2 Факториалы растут удивительно быстро. Вы можете понаблюдать за их изменением, рассмотрев таблицу, в которой приведены факториалы чисел от 1 до 10:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

А значение выражения $15!$, которого нет в таблице, превосходит 10^{12} , а именно: $15! = 1\,307\,674\,368\,000$. Может быть, именно из-за быстрого роста факториалов восхищённый изобретатель этого выражения использовал восклицательный знак.

- 3 С помощью символа $n!$ принято записывать формулу для подсчёта числа перестановок. Число перестановок для множества из n элементов обозначают через P_n (читают: « P из n », P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка). Тогда

$$P_n = n!$$

Пример 1. В расписании 7 класса на четверг должно быть шесть предметов: русский язык, литература, алгебра, география, физика, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

Число способов, которыми можно составить расписание, равно числу перестановок из шести элементов:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Пример 2. Сколькими способами можно составить расписание из тех же шести предметов, если требуется, чтобы урок физкультуры был последним?

У урока физкультуры фиксированное место, поэтому расписания отличаются порядком остальных пяти предметов. Значит, число таких расписаний равно числу перестановок из пяти элементов:

$$P_5 = 5! = 120.$$

Пример 3. Сколькими способами из тех же шести предметов можно составить такое расписание, в котором русский язык и литература стоят рядом?

Будем рассматривать русский язык и литературу как один предмет, тогда всего предметов будет пять. Число способов, которыми можно составить расписание из пяти предметов, равно $P_5 = 5!$. Но в каждой из этих перестановок русский язык и литература могут меняться местами. Поэтому искомое число расписаний вдвое больше. Оно равно $5! \cdot 2 = 240$.



- Используя термин «факториал», ответьте, сколькими способами могут распределиться места между четырьмя участниками турнира? пятью участниками? десятью участниками?
- Назовите все перестановки множества, состоящего из трёх букв: «а», «б», «в». Сколько существует перестановок из трёх элементов?
- Что растёт быстрее: $n!$ или n^2 ? $n!$ или 2^n ?
- а) В понедельник в 7 классе 5 уроков: алгебра, русский язык, история, биология, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание уроков на понедельник?
б) Во вторник в 7 классе также 5 уроков: алгебра, русский язык, география и два урока физкультуры, которые должны идти подряд. Сколькими способами можно составить расписание уроков на вторник?

А

599 РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ Вычислите:

- а) $4!$; б) $5!$; в) $4! + 5!$; г) $4! \cdot 5!$; д) $5 \cdot 4!$.

- 600** а) В конкурсе участвуют 8 школьников. Сколькими способами могут распределиться места между ними?
 б) Сколькими способами можно составить маршрут путешествия, проходящего через 7 городов?
 в) Сколькими способами можно расставить на полке 10 различных книг?
- 601** ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ Для каждой из 10 команд, участвующих в школьной спартакиаде, надо изготовить свой флаг. Есть материя трёх цветов: красного, синего и белого. Флаг шьют из трёх одинаковых по величине и разных по цвету горизонтальных полос. Удастся ли таким образом сделать флаг для каждой команды?
- 602** Напомним, что анаграмма — это слово, полученное из данного слова перестановкой его букв (но необязательно имеющее смысл). Сколько существует различных анаграмм слова «график»? слова «интеграл»?
- 603** Из нечётных цифр составляют всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр.
 а) Сколько всего таких чисел?
 б) Сколько таких чисел начинается с цифры 1?
- 604** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются пятизначные числа, в которых все цифры разные.
 а) Сколько из них делится на 5?
 б) Сколько из них не делится на 5?
- 605** Сколько пятизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8?

Б

- 606** Сколько существует анаграмм слова: а) «факториал»; б) «перестановка»; в) «комбинаторика»?
 Указание. а) Временно считайте две буквы «а» различными буквами (обозначьте их « a_1 » и « a_2 ») и сосчитайте всевозможные анаграммы. Далее учтите, что те анаграммы, которые получаются перестановкой букв « a_1 » и « a_2 », на самом деле одинаковы.
- 607** Сколькими способами можно расставить на полке 10 книг, из которых 4 книги одного автора, а остальные — разных авторов, так, чтобы книги одного автора стояли рядом?
- 608** Пять мальчиков и пять девочек занимают в театре в одном ряду места с 1-го по 10-е. Мальчики садятся на нечётные места, а девочки — на чётные. Сколькими способами они могут это сделать?

609 ■ **ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО** ■ Верно ли, что:

а) $10! = 10 \cdot 9!$; б) $10! = 2! \cdot 5!$; в) $\frac{12!}{11!} = 12?$

610 ■ **АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ** ■ а) Делится ли $100!$ на 47? на 99? на 101? на 102?

б) Сколькими нулями оканчивается число $100!$?

611 ■ **ДОКАЗЫВАЕМ** ■ Докажите, что $n! \leq n^n$.

6.5 Круговые перестановки

(Для тех, кому интересно)

Иногда условие задачи можно понять по-разному, и тогда при переводе условия на математический язык получаются разные задачи, в которых не совпадают ни решения, ни ответы. И это вовсе не значит, что один из получившихся ответов правильный, а другой нет.

Давайте исследуем эту проблему на примере комбинаторных задач на «перестановки по кругу».

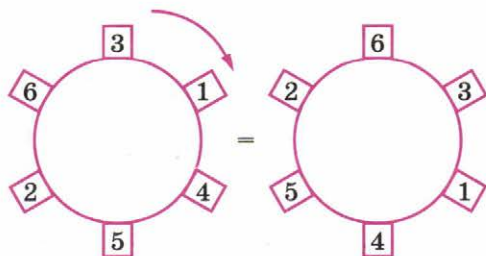
Сколько, например, существует вариантов расположения шести гостей за шестиместным столом?

Эта задача имеет разные решения и соответственно разные ответы в зависимости от того, что понимать под различным расположением гостей за столом.

Если считать, что нам важно, кто на каком стуле сидит, то это простая задача на перестановки, и всего будет $6! = 720$ различных вариантов посадить гостей за стол.

Однако часто бывает важно не то, кто какой стул занял, а то, кто с кем сидит рядом, т. е. взаимное расположение гостей.

Это уже совсем другая задача. Теперь расположения, получаемые одно из другого при одновременном перемещении всех гостей вокруг стола без изменения их взаимного расположения (рис. 6.1), надо считать одинаковыми. Ясно, что для любого расположения гостей таких одинаковых вариантов, получаемых один из другого поворотом, шесть. Значит, $6!$ надо разделить на 6. Так как $6! : 6 = 5!$, то получается только 120 различных вариантов.



■ Рис. 6.1

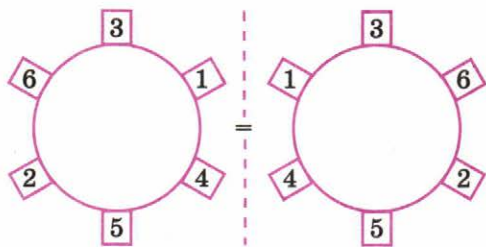


Рис. 6.2

Но если нас интересует только взаимное расположение гостей, то одинаковыми можно считать и такие симметричные расположения, при которых у каждого гостя остаются те же соседи за столом, только левый и правый соседи меняются местами (рис. 6.2).

При таком понимании общее число различных расположений гостей вокруг стола будет ещё вдвое меньше: $120 : 2 = 60$.

- 612** а) Сколько имеется вариантов рассадить президентов «большой восьмёрки» за восьмиместным круглым столом переговоров?
 б) Сколькими способами десять приятелей могут сесть на десятиместную карусель?
- 613** Двенадцать девочек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?
- 614** Сколько ожерелий можно составить из 20 различных бусин?

Дополнительные задания

Преобразование выражений, содержащих степени

- 615** Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{5a^2b^8c^3}{25a^5bc^2}; \quad \text{б) } \frac{24a^5b^6}{48a^5b^3}; \quad \text{в) } \frac{16xyz^7}{24x^2y^3z^2}; \quad \text{г) } \frac{36x^5yz^5}{12x^6y^2z^5}.$$

- 616** Запишите произведение:

- а) $32 \cdot 128$ в виде степени числа 2;
 б) $162 \cdot 81$ в виде степени числа 3;
 в) $125 \cdot 625$ в виде степени числа 5;
 г) $0,00001 \cdot 0,0001$ в виде степени числа 0,1.

- 617** Выполните действия:

$$\text{а) } 12 \cdot \left(\frac{x^3}{4}\right)^2; \quad \text{б) } \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2a^2}{b}\right)^3; \quad \text{в) } \left(\frac{3c}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{c^2}{3}\right)^2; \quad \text{г) } \left(\frac{3y}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

- 618** Найдите значение выражения при заданных значениях переменной:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{(2x)^4}{(4x)^2} \text{ при } x = -\frac{2}{3}; & \quad \text{в) } \frac{(2a)^3(2a)^2}{(4a)^2} \text{ при } a = -0,1; \\ \text{б) } \frac{(9y)^3}{(3y)^5} \text{ при } y = \frac{1}{3}; & \quad \text{г) } \frac{(4c)^5(2c)^6}{(4c)^6} \text{ при } c = -0,5. \end{aligned}$$

619 Упростите выражение:

- а) $2^{2n} \cdot 16$; б) $2^3 \cdot 8^n$; в) $25^n \cdot 125^5$; г) $9^4 \cdot 81^{2n}$.

620 Какое выражение надо подставить вместо a , чтобы полученное равенство было верным:

- а) $a^2 = x^{20}$; б) $a^5 = -x^{15}$; в) $x^{11} = a^3 \cdot x^5$; г) $(-x)^3(-x)^6 = a^3$?

621 Найдите:

- а) 5^{m+2} , если $5^m = c$; в) 2^{m-1} , если $2^m = y$;
б) 6^{2m+1} , если $6^m = a$; г) $3^{3(m-1)}$, если $3^m = p$.

622 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ Решите задачу, представив данные с помощью степени числа 10. (При вычислениях используйте калькулятор.)

- а) Ростовская область занимает территорию в 100,8 тыс. км², а её население составляет 4,1 млн человек. Какова плотность населения Ростовской области (число человек на 1 км²)?
б) Радиус Земли приближённо равен 6,37 тыс. км. Вычислите площадь её поверхности (в млн кв. км) по формуле площади поверхности сферы $S = 4\pi R^2$, где R — радиус сферы, $\pi \approx 3,14$.

Комбинаторные задачи

623 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ Ваня знает, что номер телефона его друга состоит из четырёх цифр 1, 2, 3, 4, но не помнит, в каком порядке их надо набирать. Сколько вариантов в худшем случае ему придётся перебрать, чтобы дозвониться до друга?

624 Мальчикам одной школы дали список из пяти известных футболистов: Андрей Аршавин, Динияр Билялетдинов, Алан Дзагоев, Юрий Жирков, Александр Кержаков. Каждый из мальчиков должен был присвоить футболистам места с первого по пятое в соответствии со своими симпатиями. Можно ли утверждать, что среди списков, полученных в результате такого опроса, будут одинаковые, если в школе учатся 128 мальчиков?

625 Сколько можно составить пятизначных чисел, меньших 7000, из цифр 1, 3, 5, 7, 9 (без повторения цифр)?

626 Номера телефонов компании «Мобильная связь» состоят из 11 цифр, причём первой цифрой должна быть цифра 8, второй — цифра 5, третьей — цифра 0. На четвёртом и пятом местах не может стоять цифра 0. Определите, сколько номеров телефонов может предложить эта компания.

- 627** Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8, используя в числе каждую цифру только один раз? Сколько среди них чётных чисел и сколько нечётных?
- 628** Команда из шести гимнасток готовится к выполнению упражнения на брусьях. Сколькими способами можно установить их очерёдность, если:
- а) Ира должна выступить первой;
 - б) Ира должна выступить первой, а Зоя последней;
 - в) Ира и Зоя должны выступать одна за другой;
 - г) Ира должна выступать первой или второй?
- 629** На скамью надо посадить трёх мальчиков и трёх девочек так, чтобы мальчик и девочка чередовались. Сколькими способами можно рассадить детей таким образом?

Указание. Посадите мальчиков сначала на чётные места, а потом на нечётные.

- 630** ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ Тест по математике для 7 класса содержит 10 заданий, в которых из четырёх предложенных ответов нужно выбрать один верный. Допустим, что кто-либо из семиклассников, ничего не зная, будет просто наугад отмечать один из ответов. Сколько вариантов выбора ответов у него существует? Сколько вариантов выбора ответов наугад существует для теста, в котором n заданий и для каждого задания предлагается 3 ответа? n заданий и для каждого задания предлагается m ответов?

■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (631–633) ■

- 631** Игральный кубик подбрасывают 5 раз и каждый раз записывают число выпавших очков. Результатом эксперимента является последовательность из пяти цифр.
- а) Каково число возможных результатов эксперимента?
 - б) Сколько существует результатов эксперимента, в которых ни разу не встречается шестёрка?
 - в) Сколько существует результатов эксперимента, в которых хотя бы раз встречается шестёрка?
- 632** Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых встречается хотя бы одна чётная цифра?
- 633** Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеются хотя бы две одинаковые цифры?

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Сформулируйте определение степени с натуральным показателем.
- 2 Сформулируйте и проиллюстрируйте на примере правило умножения степеней с одинаковыми основаниями. Докажите соответствующее свойство степени.
- 3 Сформулируйте и проиллюстрируйте на примере правило деления степеней с одинаковыми основаниями. Докажите соответствующее свойство степени.
- 4 Сформулируйте и проиллюстрируйте на примере правило возведения степени в степень. Докажите соответствующее свойство степени.
- 5 Сформулируйте и проиллюстрируйте на примере правило возведения в степень произведения. Докажите соответствующее свойство степени.
- 6 Сформулируйте и проиллюстрируйте на примере правило возведения в степень дроби. Докажите соответствующее свойство степени.
- 7 Запишите формулу для подсчёта числа перестановок. Приведите пример задачи, в которой нужно подсчитать число перестановок.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- 1 Выполните действие, воспользовавшись соответствующим свойством степени: а) $a^5 \cdot a^3$; б) $a^8 : a^6$; в) $(a^2)^4$; г) $(ab)^6$; д) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$.
- 2 Выполните действие: а) $a^2 \cdot a^n$; б) $a^n : a^2$; в) $(a^n)^2$.
- 3 Упростите выражение: а) $x^4 \cdot (x^3)^2$; б) $\frac{x^2 x^9}{x^5}$.
- 4 Вычислите: а) $\frac{5^4 \cdot 5^5}{5^7}$; б) $0,2^{10} \cdot 5^{10}$; в) $\frac{10^6}{5^6}$; г) $\frac{8^{20}}{2^{62}}$.
- 5 Упростите выражение: а) $-3xy^3 \cdot 2xy^2$; б) $(-2a^2b)^3$; в) $(-x^3y^2)^4$.
- 6 Сократите дробь: а) $\frac{c^5 \cdot x^2}{c^3 x}$; б) $\frac{12a^3c}{18a^2c^3}$.
- 7 Сколько существует трёхзначных чисел, составленных из нечётных цифр (все цифры в записи числа различны)?
- 8 Сколькими способами можно построить в ряд 5 человек?

Проверьте себя (тест)

- Упростите выражение $a^2b^3aba^8$.
- Выполните умножение $a^2 \cdot a^n$.
- Значение какого из выражений равно 2^{11} ?
 1) $2^{12} - 2$ 2) $2^{12} : 2$ 3) $2^{22} : 2$ 4) $2^{22} : 2^2$
- Какая из дробей равна выражению a^{k-1} ?
 1) $\frac{a^k}{a}$ 2) $\frac{a^{k-1}}{a}$ 3) $\frac{a^{k+1}}{a^{k-1}}$ 4) $\frac{a^k}{a^{k-1}}$
- Для каждого выражения из верхней строки укажите равное ему выражение из нижней строки.
 А) $a^{10} \cdot a^2$ Б) $(a^{10})^2$ В) $a^{10} : a^2$ Г) $(a \cdot a^{10})^2$
 1) a^5 2) a^8 3) a^{12} 4) a^{20} 5) a^{22}
- Известно, что $5^5 = 3125$. Найдите 5^6 .
- Упростите выражение $\frac{a^9 \cdot a^3}{a^{10}}$ и найдите его значение при $a = -\frac{1}{3}$.
- Упростите выражение $(-x)^2(-x)^3(-x^3)^2$.
 1) x^{36} 2) $-x^{36}$ 3) x^{11} 4) $-x^{11}$
- Возведите в куб выражение $-2a^{20}c^{12}x$.
- Выполните действие: $\left(\frac{3x}{y^3}\right)^2$.
 1) $\frac{9x^2}{y^6}$ 2) $\frac{6x^2}{y^6}$ 3) $\frac{3x^2}{y^3}$ 4) $\frac{3x^2}{y^6}$
- Какое из данных выражений можно представить в виде $(a^3b)^2$?
 1) a^6b^2 2) $-a^6b^2$ 3) a^5b^2 4) $-a^5b^2$
- Какое из данных выражений нельзя представить ни в виде квадрата, ни в виде куба?
 1) a^3c^6 2) $-a^3c^6$ 3) $-a^2c^2$ 4) $(-a)^2b^2$
- Вычислите $\frac{7^5 \cdot (7^4)^2}{(7^5)^3}$.
- Найдите значение выражения $\frac{8^2 \cdot 9^5}{6^8}$.
 1) $\frac{1}{24}$ 2) $2\frac{1}{4}$ 3) $1\frac{1}{2}$ 4) 1296

- 15 При каком значении x верно равенство $2^x \cdot 2^5 = 1024$?
1) при $x = 2$ 2) при $x = 3$ 3) при $x = 5$ 4) при $x = 10$
- 16 Какое из следующих неравенств неверно?
1) $9^{10} < 3^{21}$ 2) $9^{10} < 5^{20}$ 3) $6^{10} < 3^{20}$ 4) $6^{10} < 2^{20}$
- 17 Какому из выражений равна сумма $5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n$?
1) 5^{n+1} 2) 5^{5n} 3) $(5^n)^5$ 4) 5^{n+5}
- 18 Сколько можно составить двузначных чисел, у которых в разряде десятков записана чётная цифра, а в разряде единиц — нечётная?
- 19 На вечеринке присутствовало 8 человек, и каждый из них обменялся с каждым фотографией. Сколько всего фотографий для этого понадобилось?
- 20 В среду в 6 классе 5 уроков. Сколькими способами можно составить расписание на этот день, если 2 из этих уроков — математика и они должны идти один за другим, а остальные уроки по разным предметам?
1) 3! 2) 4! 3) 5! 4) 6!

Многочлены

Как вы уже знаете, складывать и умножать можно не только числа, но и алгебраические выражения. В множестве алгебраических выражений выделяется одно интересное и важное подмножество, элементы которого называют многочленами. Это выражения, которые получаются в результате сложения, вычитания и умножения чисел и переменных, и возникают они в самых разных областях знания – математике, экономике, биологии, социальных науках. Многочлены занимают важное место и в школьном курсе математики, и вы будете изучать их достаточно подробно. В этой главе вы рассмотрите некоторые практические ситуации, в которых используются многочлены, узнаете, как оперируют с многочленами – складывают, вычитают и умножают, познакомитесь с новыми полезными формулами.

7.1 Одночлены и многочлены

- 1** Рассмотрим выражения $3ac$, $-x^2y$, b^{10} , $2a^2b \cdot (-5)b^2c$. Все они составлены из чисел и переменных с помощью одного только действия – умножения. (Напомним, что возведение в степень – это тоже умножение.) Такие выражения называют **одночленами**. Числа и переменные также считают одночленами.

Одночлен $2a^2b \cdot (-5)b^2c$ можно упростить:

$$2a^2b \cdot (-5)b^2c = 2 \cdot (-5)a^2bb^2c = -10a^2b^3c.$$

В получившемся произведении только один числовой множитель, и он записан на первом месте. Каждая переменная (в соответствующей степени) содержится в нём тоже только один раз. Такой одночлен называют *одночленом стандартного вида*.

К одночленам стандартного вида относятся также числа, переменные, степени переменных.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом одночлена*.

- 2** Алгебраическую сумму одночленов называют **многочленом**. Вот примеры многочленов:

$$a^3 - 2a^2 + a, \quad 5b - c, \quad 3xy - y + 4x - 7.$$

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют *членами многочлена*. Так, членами многочлена $3xy - y + 4x - 7$ являются одночлены $3xy$, $-y$, $4x$ и -7 .

Одночлены принято рассматривать как частный случай многочленов — считают, что это многочлены, состоящие из одного члена. Специальные названия имеют и многочлены, состоящие из двух и трёх членов — *двучлен* и *трёхчлен* соответственно.

Если все члены многочлена являются одночленами стандартного вида и среди них нет подобных членов, то такой многочлен называют *многочленом стандартного вида*.

Представим в стандартном виде многочлен

$$3ab - a^2 + b - 2ab + 5b.$$

Для этого достаточно привести подобные слагаемые, т. е. подобные члены этого многочлена:

$$3ab - a^2 + b - 2ab + 5b = ab - a^2 + 6b.$$

З Если многочлен стандартного вида содержит одну переменную, то его члены обычно располагают в порядке убывания её степеней. При этом *свободный член многочлена*, т. е. член, не содержащий буквы, помещают на последнем месте.

Например, многочлен $5x^2 - 1 - x^3 + 4x$ записывают так:

$$-x^3 + 5x^2 + 4x - 1.$$

Наибольший показатель степени, в которой переменная входит в этот многочлен, равен 3. Говорят, что $-x^3 + 5x^2 + 4x - 1$ — *многочлен третьей степени*.

- Какие из следующих выражений являются одночленами, а какие нет?
1) $6x^5y$ 2) x 3) $\frac{2a}{x}$ 4) 17 5) $b + 4$ 6) $\frac{1}{3}ac^3$
- Назовите все члены многочлена и коэффициенты членов, содержащих буквенные множители:
а) $8a^3 - 12a^2b + ab^2 - b^3$; б) $m^3 + 2m^2 - 9m + 2$.
- Дан многочлен с одной переменной: $-3x^4 + 2x^2 - x - 10$. Назовите коэффициенты членов многочлена, содержащих букву; назовите свободный член многочлена; определите степень многочлена.
- Какое утверждение верно, а какое неверно?
1) $3xy$ — трёхчлен 3) $3xy$ — многочлен
2) $3xy$ — одночлен 4) $3 + x + y$ — трёхчлен

А

- 634** Представьте в стандартном виде многочлен:
а) $6a \cdot 0,5 - 3a \cdot 2x + 2a \cdot 7a$; б) $8x^2 - 4x + x + 1$.
- 635** Запишите многочлен, расположив его члены по убыванию степеней переменной, и укажите его степень:
а) $19z^2 - 8z + z^4 - 7 - 3z^3$; б) $2y^3 + 5y^2 - 3y^4 + y^5 - 1$.
- 636** Расположите многочлен по убывающим степеням буквы a :
а) $2ab + 3a^3 + a^2b^2$; б) $a^4x + a^2x^3 + ax^2 + a^3x$.

637 Найдите значение выражения:

- а) $0,4x - 10$ при $x = -15$; в) $6a + 0,5b$ при $a = \frac{2}{3}$, $b = -2$;
 б) $1 - \frac{1}{3}a$ при $a = 18$; г) $0,3x - 0,1y$ при $x = -4$, $y = -10$.

638 Найдите значение выражения $y^4 + 2y^2 - 5y + 1$:

- а) при $y = -1$; б) при $y = 1$; в) при $y = 0$; г) при $y = \frac{1}{2}$.

639 Найдите значение данного многочлена при $a = -0,5$:

- а) $2a^2 + a - 7$; б) $-0,4a^2 + 0,3a - 1$.

640 Вычислите:

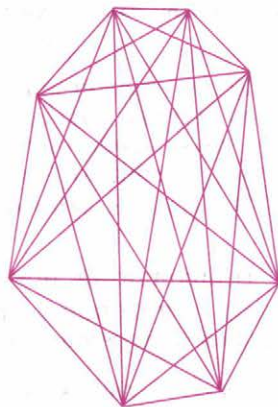
- а) $p - 0,5c^3$ при $p = -6$, $c = -5$;
 б) $x^3 - 4xy$ при $x = 0,2$, $y = 0,1$.

■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (641–642) ■

641 Число диагоналей многоугольника с n вершинами (рис. 7.1) вычисляется по формуле $D = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$. Сколько диагоналей имеет:

- а) шестиугольник; б) восьмиугольник;
 в) двенадцатиугольник; г) стоугольник?

642 Сумму последовательных натуральных чисел от 1 до n можно вычислить по формуле $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

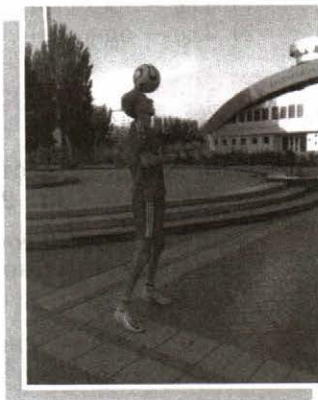


■ Рис. 7.1

Используя формулу, вычислите сумму последовательных натуральных чисел: а) от 1 до 20; б) от 1 до 100.

643 **■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ ■** а) Сигнальная ракета выпущена под углом 45° к горизонту с начальной скоростью 30 м/с. Высоту (в метрах), на которой находится ракета, можно при этих условиях вычислить, подставив время полёта (в секундах) в многочлен $2 + 21t - 5t^2$. На какой высоте окажется ракета через 2 с после запуска? через 4 с?

б) Футболист на тренировке подбрасывает мяч головой вертикально вверх, придавая ему начальную скорость 10 м/с. В этом случае высота, на которой находится мяч, может быть приближённо вычислена по формуле $h = 2 + 10t - 5t^2$, где h — высота полёта (в метрах), t — время (в секундах). На какой высоте будет находиться мяч через 1 с? через 1,5 с? через 2 с?



Приведите подобные члены многочлена (644—645).

644 а) $12n^2 + 5m - n^2 - 4m$; в) $2m^3 + n^2 - 1 - n^2 + 2m^3$;
 б) $-a^2 - b^2 + 2a^2 - b^2$; г) $3x^3 - 2y - 5x^3 - 2 + 2y - 7$.

645 а) $0,5c^4 + 0,3c^2 + c^3 - 0,5c^2$; г) $\frac{1}{2}m^5 - \frac{1}{4}m^3 + m^3 - \frac{3}{4}m^5$;
 б) $1,4z^3 - 0,1z^2 - 0,4z^3 + 1$; д) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}x^3 + 3$;
 в) $a^2 + a + \frac{1}{4}a^2 - a$; е) $\frac{2}{5}b^2 + b - \frac{3}{5}b^2 + \frac{1}{4}b$.

646 Упростите:

а) $3a^2b - ab^2 - a^2b + 2ab^2$; в) $10xy - xy^2 - 10xy + x^2y$;
 б) $mn - 7mn^2 - mn - 7mn^2$; г) $5xz^2 - 4xz^2 + xz - 5xz^2$.

Б

647 Дан многочлен $2a^4 - 3a^3 - a^2 + 5a - 1$. Подставьте вместо a заданное выражение и приведите многочлен к стандартному виду:
 а) $2x$; б) $-x$; в) $3x^2$; г) $-2x^3$.

648 Сумму квадратов натуральных чисел от 1 до n можно вычислить по формуле

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3.$$

Вычислите сумму квадратов натуральных чисел для:

а) $n = 10$; б) $n = 50$.

649 Сумму кубов натуральных чисел от 1 до n можно вычислить по формуле $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$.

Вычислите сумму кубов натуральных чисел для:

а) $n = 10$; б) $n = 50$.

650 Упростите:

а) $5xy^2 - 3x^2y - xy + 5x^2y - 6xy^2 + xy$;
 б) $8a^3 - 6a^2b + b^2 - 8a^3 + 3a^2b - 3b^2$;
 в) $3x^4y + 2x^4 - xy^4 + 2x^4 + 2x^4y - 4x^4$;
 г) $6a^3b^2 - a^2b^3 - 7a^3b^2 - a^2b^3 + 5a^3 - a^3b^2$.

651 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Предложение «Число, в котором в разряде сотен записана цифра x , в разряде десятков — цифра y , в разряде единиц — цифра z » коротко записывают так: xyz . Такое число может быть представлено в виде многочлена: $xyz = 100x + 10y + z$. Представьте в виде многочлена число:

а) $\overline{xy}$; б) $\overline{yz}$; в) $\overline{abc}$; г) $\overline{cba}$; д) $\overline{mnpq}$; е) $\overline{qrpt}$.

652 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■ Докажите, что:

- а) четырёхзначное число, записанное одинаковыми цифрами, делится на 11;
 б) трёхзначное число, записанное одинаковыми цифрами, делится на 37; не делится на 11.

653 ■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ ■ Маша решила накапливать на банковском счёте небольшие денежные суммы, которые она получала в подарок от родственников на Новый год. Она нашла банк, который начислял 10% годовых (т. е. увеличивал на 10% в год сумму, имеющуюся на счёте). В первый год она внесла 300 р., во второй — 500 р., в третий — 200 р., в четвёртый — 700 р. Как посчитать, сколько денег было на её счёте после внесения четвёртого взноса?

Будем рассуждать так. Через год после внесения суммы и далее каждый год банк увеличивал её на 10%, т. е. в 1,1 раза, плюс добавлялась новая сумма. Результат показан в таблице:

Год	Сумма на счёте (в рублях)	Итого (в рублях)
1-й	300	300
2-й	$300 \cdot 1,1 + 500$	830
3-й	$300 \cdot (1,1)^2 + 500 \cdot 1,1 + 200$	1113
4-й	$300 \cdot (1,1)^3 + 500 \cdot (1,1)^2 + 200 \cdot 1,1 + 700$	1924,3

↑
Рост вноса
1-го года

↑
Рост вноса
2-го года

↑
Рост вноса
3-го года

↑
Внос
4-го года

Обозначив 1,1 (коэффициент роста) буквой x , мы можем записать общую сумму на счёте с помощью многочлена $300x^3 + 500x^2 + 200x + 700$. Если, например, коэффициент роста будет другим, то достаточно подставить в это выражение вместо x его значение и выполнить вычисления.

1) Вычислите, какой была бы сумма на счёте Маши, если бы банк начислял 12% годовых.

2) Представьте, что вы открыли счёт с коэффициентом роста x и один раз в год вносите на этот счёт 1000 р. Составьте выражение для вычисления суммы, которая будет на вашем счёте сразу после третьего вноса. Определите эту сумму, если ежегодное начисление составляет 6%.

7.2 Сложение и вычитание многочленов

1 Сложить два многочлена или вычесть один из другого очень просто. Фактически вы уже умеете это делать.

Чтобы сложить два многочлена, нужно составить их сумму, раскрыть скобки и, если возможно, упростить получившееся выражение.

Пример 1. Сложим многочлены $2x^2 - 2xy + y^2$ и $3xy - y^2$:

$$\begin{aligned} & (2x^2 - 2xy + y^2) + (3xy - y^2) = \\ & = 2x^2 - \underline{2xy} + \underline{y^2} + \underline{3xy} - \underline{y^2} = 2x^2 + xy. \end{aligned}$$

Суммой данных многочленов является многочлен $2x^2 + xy$.

2 Чтобы из одного многочлена вычесть другой, нужно составить их разность, раскрыть скобки и, если возможно, упростить получившееся выражение.

Пример 2. Вычтем из многочлена $2x^2 - 2xy + y^2$ многочлен $3xy - y^2$:

$$\begin{aligned} & (2x^2 - 2xy + y^2) - (3xy - y^2) = \\ & = 2x^2 - \underline{2xy} + \underline{y^2} - \underline{3xy} + \underline{y^2} = 2x^2 - 5xy + 2y^2. \end{aligned}$$

Разностью данных многочленов является многочлен $2x^2 - 5xy + 2y^2$.

Вообще результатом сложения и вычитания многочленов является многочлен.

3 Вы знаете, что если перед числом поставить знак «-», то получится число, ему противоположное. Сумма противоположных чисел равна 0: $a + (-a) = 0$.

Точно так же выражение, противоположное, например, сумме $2x - y + 5$, есть $-(2x - y + 5)$. Так как

$$-(2x - y + 5) = -2x + y - 5,$$

то выражение, противоположное многочлену $2x - y + 5$, есть многочлен, составленный из тех же членов, но взятых с противоположными знаками. Чтобы доказать, что два многочлена противоположны, достаточно убедиться, что их сумма равна 0.

4 Сумму и разность многочленов с одной переменной удобно вычислять в столбик, подписывая друг под другом подобные члены.

Пример 3. Найдём сумму и разность многочленов

$$x^3 + 2x^2 + x + 1 \text{ и } x^3 - 2x^2 - x + 1:$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ + \quad x^3 - 2x^2 - x + 1 \\ \hline 2x^3 \qquad \qquad + 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ + \quad -x^3 + 2x^2 - x - 1 \\ \hline 4x^2 + 2x \end{array}$$

Обратите внимание: вычитание мы заменили сложением с многочленом, противоположным второму многочлену.

- Разберите примеры 1 и 2. Для каждого из них:
 - а) сформулируйте правило раскрытия скобок, которое использовалось в примере;
 - б) укажите подобные члены в получившемся после раскрытия скобок выражении и выполните приведение подобных.
- Запишите многочлен, противоположный многочлену $-3x^2 + 7$. Чему равна сумма данного многочлена и противоположного ему?
- Разберите пример 3 и выполните по этому образцу сложение многочленов $x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ и $4x^2 - x + 5$ и вычитание из первого многочлена второго.

А

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (654–657)

654 Выполните сложение:

- а) $(3a^2 - 2a) + (-a^2 + 3a)$; в) $(14mn - 15m) + (-15mn - 14m)$;
- б) $(6c^2 - 2cd) + (10c^2 + 18cd)$; г) $(3a^2 - 7b^2) + (6b^2 - 2a^2)$.

655 Раскройте скобки и приведите подобные:

- а) $(5x^3 - 3x^2 - 7) + (4 + 3x^2 - 5x^3)$;
- б) $(z^2 - 3z + 2) + (4z + 8) + (3z^2 - 5)$;
- в) $(3t^3 - 4t^2 + 7t) + (2t^2 - 6t + 7)$;
- г) $(2a^2 + 5a) + (-a^2 + a) + (a^2 - 3a - 5)$.

656 Упростите выражение:

- а) $(7x + y) - (-x - 2y)$; в) $(x^2 - 3x) - (2x + 1)$;
- б) $(b - 3) - (2b + 2)$; г) $(5b^2 + 2b) - (4b^2 - 3b)$.

657 Раскройте скобки:

- а) $(10a - 2b + 5c) - (-5a + 20b - c)$;
- б) $(16m - 11n - 7mn) - (6mn - 10n + 16m)$;
- в) $(c^2 + 3cd - d^2) - (4cd + 5d^2 - 6c^2)$;
- г) $(3b^3 - 2ab + a^3) - (2ab + 3b^3)$.

658 Составьте сумму и разность многочленов и упростите получившиеся выражения:

- а) $6a^2 - 3a + 1$ и $6a^2 - 1$; в) $k^3 - 3k^2 + 1$ и $2k^3 - 3k^2 + 4$;
- б) $n^3 + 2n^2 - n + 1$ и $1 - n^3$; г) $3x^2 - 2x + 7$ и $2x^2 + 2x + 7$.

659 Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

- а) $(x - y) + (y - x) - (x + y)$; $x = -5$; $y = 3,2$;
- б) $(m + n) - (n + p) - (m + p)$; $m = \frac{3}{4}$; $n = -\frac{1}{3}$; $p = 4$;

в) $(m - n) + (n - c) - (m - c)$; $m = \frac{1}{6}$; $n = \frac{1}{7}$; $c = \frac{1}{4}$;

г) $(a + b - c) + (a - b + c) - (a - b - c)$; $a = 1,2$; $b = -0,8$; $c = 0,6$.

660 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Запишите многочлен, который надо прибавить к трёхчлену $3a^3 - 2a^2 + 1$, чтобы сумма оказалась равной:

а) 10; б) a^3 ; в) $-3a^2$.

661 Раскройте скобки:

а) $-(a + b)$; г) $-(x - y - z)$;

б) $-(m - n)$; д) $-(3a + 2b - c)$;

в) $-(-c - b)$; е) $-(5z - x + y)$.

662 Какой двучлен надо прибавить к данному двучлену, чтобы в сумме получился 0:

а) $a + b$; б) $x - y$; в) $m - n$?

663 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■ Докажите, что:

а) двучлены $a - b$ и $b - a$ противоположны;

б) двучлены $a + b$ и $-a - b$ противоположны.

664 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Убедитесь в том, что данные многочлены противоположны, и найдите значение каждого из них при заданных значениях переменных:

а) $x - y - z$ и $y + z - x$ при $x = 0,3$, $y = -0,2$, $z = -0,1$;

б) $x^2 + 2x - 1$ и $1 - 2x - x^2$ при $x = -\frac{1}{3}$.

665 Представьте многочлен в виде суммы и в виде разности двух каких-либо двучленов (проверьте, раскрыв мысленно скобки, правильно ли вы выполнили задание):

а) $a - b - c + d$; б) $m + n - p + q$.

666 Многочлен $x^3 - x^2 - x + 1$ представили в виде разности двучленов. Найдите эту разность среди приведённых ниже выражений.

1) $(x^3 - x^2) - (x + 1)$

3) $(x^3 + 1) - (x^2 - x)$

2) $(x^3 - x) - (x^2 + 1)$

4) $(1 - x) - (x^2 - x^3)$

Б

667 Упростите выражение, расположив слагаемые в столбик:

а) $(p^2 + q^2 - r^2) + (q^2 + r^2 - p^2) + (r^2 + p^2 - q^2) + (r^2 - p^2 - q^2)$;

б) $(a - b + c) - (a - b + d) + (a - c + d) - (b - c + d)$;

в) $(x + y + z - 1) - (x - y + z + 1) + (x - y - z + 1) - (x - y - z - 1)$.

668 ■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ ■ Не меняя ни одного знака, расставьте скобки так, чтобы выполнялось равенство:

а) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 1 = 2$;

б) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 1 = -2$;

в) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 1 = 0$.

- 669** Упростите выражения $P + Q$, $P - Q$ и $Q - P$, если:
 а) $P = 2x^2 + x - 2$, $Q = 1 + 2x - 2x^2$;
 б) $P = 12 - 5a - 10a^2$, $Q = 10 + 4a - 10a^2$.
- 670** Упростите выражения $P - Q + R$ и $P - (Q + R)$, если
 $P = 2m^2 - m - 1$, $Q = m^2 - 2m$, $R = m - 1$.
- 671** Выпишите пары противоположных выражений и пары равных выражений:
 $2x - 3y$, $2x + 3y$, $3y - 2x$, $-2x - 3y$, $-(2x - 3y)$, $-(3y - 2x)$.
- 672** Многочлен $2a^3 - 3a^2 - 4a + 5$ представьте в виде разности двух двучленов всеми возможными способами.
- 673** Представьте в виде суммы и разности двух каких-либо двучленов трёхчлен:
 а) $x^2 + 3x - 1$; б) $a^2 - 5a + 2$; в) $m^2 + m - 4$; г) $y^2 - y + 10$.

■ ИЩЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ (674–676) ■

- 674** Известно, что $t - u = 18$, $u - s = 13$. Найдите $t - s$ и $s - t$.
- 675** Выразите $a - c$ и $c - a$ через x и y , если $x = a - b$, $y = b - c$.
- 676** Представьте в виде суммы двух каких-либо двучленов:
 а) $x - y$; б) $x + y$.
- 677** ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■ Докажите, что если $a + b + c = 0$, то
 $abc - (a + b - c) - (b + c - a) - (c + a - b) = abc$.

■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (678–679) ■

- 678** Представьте в виде многочлена стандартного вида:
 а) сумму двузначного числа $\overline{ab}$ с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке;
 б) разность трёхзначного числа $\overline{abc}$ и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке;
 в) сумму всех трёхзначных чисел, которые могут быть записаны цифрами a , b и c так, чтобы каждая из них содержалась в числе только один раз.
- 679** а) Докажите, что сумма двузначных чисел, записанных одними и теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 11.
 б) Докажите, что разность двузначных чисел, записанных одними и теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.
- 680** ■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ ■ 1) Маша и её брат вкладывали в банк деньги, получаемые ими в подарок от родственников на Новый год. Они имеют на счетах следующие суммы:
 Маша: $300x^3 + 500x^2 + 200x + 700$;
 брат: $500x^2 + 600x + 700$.

1) «Расшифруйте» каждый многочлен.

Подсказка. Посмотрите задачу 653.

2) Сколько денег у них вместе на банковских счетах?

3) Сколько процентов в год начисляет банк, если $x = 1,12$? На чьём счёте в этом случае денег больше и на сколько? (Воспользуйтесь калькулятором.)

7.3 Умножение одночлена на многочлен

Умножим одночлен $3x$ на многочлен $2x^3 + 5$. Для этого составим их произведение и с помощью распределительного свойства раскроем скобки:

$$3x(2x^3 + 5) = 3x \cdot 2x^3 + 3x \cdot 5 = 6x^4 + 15x.$$

В результате мы получили многочлен $6x^4 + 15x$.

Вообще произведение одночлена и многочлена всегда можно преобразовать в многочлен.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пример 1. Представим в виде многочлена произведение

$$-5a^2(3a^3 - a + 4):$$

$$-5a^2(3a^3 - a + 4) = -5a^2 \cdot 3a^3 - 5a^2(-a) - 5a^2 \cdot 4 = -15a^5 + 5a^3 - 20a^2.$$

Запись можно вести короче, не выписывая промежуточные результаты:

$$5a^2(3a^3 - a + 4) = -15a^5 + 5a^3 - 20a^2.$$

Пример 2. Упростим выражение $7c - 5c(1 - c)$.

Раскроем скобки, выполнив умножение $-5c$ на $1 - c$, и затем приведём подобные члены (если они окажутся):

$$7c - 5c(1 - c) = 7c - 5c + 5c^2 = 2c + 5c^2.$$

- Какой закон алгебры лежит в основе правила умножения одночлена на многочлен? Запишите его с помощью букв.
- Выполните умножение одночлена на многочлен и прокомментируйте свои шаги: $-5a(b + 2c - 4)$.

A

- 681 ■ МОДЕЛИРУЕМ ■** Найдите двумя способами площадь прямоугольника (рис. 7.2) и запишите соответствующее равенство.

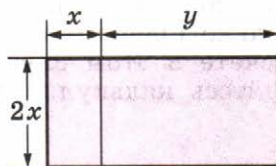


Рис. 7.2

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (682–684)

- 682** Раскройте скобки:

а) $c(2a + b)$;	г) $3x(4y - z)$;	ж) $m(1 - m)$;
б) $2a(3b + 5)$;	д) $-z(x - y)$;	з) $-3x(2x + 5)$;
в) $-2c(4c + 1)$;	е) $(m - 3n)(-a)$;	и) $(-a - 4bc)(-b)$.

- 683** Выполните умножение:

а) $a(3a^2 + a)$;	г) $(6k^2 - a)(-2k)$;	ж) $-5p^2(2p^4 - 3)$;
б) $b(2b^3 - 7)$;	д) $4m^3(n - 5m)$;	з) $(b - 2ac) \cdot 5ab$;
в) $-p^2(3q - 2p)$;	е) $-2y^2(y^3 - 1)$;	и) $x^5(-x^3 - x^2)$.

- 684** Представьте в виде многочлена:

а) $5(a^2 - 2ab + b^2)$;	г) $4n^2(1 - 2n^2 - 3n^3)$;
б) $2m(m^2 - 3m + 3)$;	д) $2b^2(b - ab + 4a^2)$;
в) $-3(x^2 + xy + y^2)$;	е) $-3c^3(4d + 3cd - c^2)$.

- 685 ■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■** Иногда удобно вести запись умножения в столбик:

$$\begin{array}{r}
 -5a^2 \\
 \times \quad 3a^3 - a + 4 \\
 \hline
 -15a^5 + 5a^3 - 20a^2
 \end{array}$$

Умножьте одночлен на многочлен:

а) $3n^4(n^2 + 2n - 4)$; б) $-2m^3(3m - 2m^2 + m^3)$; в) $5xy^2(2x - x^2y - x^3)$.

Упростите выражение (686–687).

- 686** а) $3n^2 - n(4n - 6m)$; б) $5a + 2a(3a - 2)$; в) $5c^3 - 3c^2(2c - 1)$.
687 а) $2x(x - y) - y(y - 2x)$; в) $2(x^2 - 7) + (7 - 2x^2)$;
 б) $a(a^2 - 1) + a^2(a - 1)$; г) $3x(x - y) + 3y(x + y)$.

- 688 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■** Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

а) $a(a + b) - b(a - b)$ при $a = -2,5$, $b = -3$;
 б) $4m(m - 2) - (4m^2 - 1)$ при $m = \frac{1}{16}$.

- 689** Составьте выражение по условию задачи и преобразуйте его в многочлен:
 а) Чему равна площадь прямоугольника, одна из сторон которого равна x см, а другая на 3 см больше?
 б) Чему равна площадь прямоугольника, одна из сторон которого равна x см, а другая на a см меньше?
- 690** Составьте выражение по условию задачи и преобразуйте его в многочлен:
 а) Какое расстояние проехал автомобиль, если он ехал 4 ч со скоростью y км/ч, а в следующие 2 ч его скорость была на 10 км/ч больше?
 б) Какое расстояние преодолел турист, если 3 ч он ехал на велосипеде со скоростью a км/ч, затем 1,5 ч шёл пешком со скоростью, на b км/ч меньшей?

Б

Решите уравнение (691—692).

- 691** а) $-7x + 5(2x - 3) = 6$; в) $0,3 - 2(x + 1) = 0,4x + 0,1$;
 б) $5x - 7(3 - x) = 2x + 11$; г) $6x - 3,2 = 7x - 3(2x - 2,5)$.
- 692** а) $2(x + 5) - 3(x - 2) = 10$; в) $5(x - 1) + 5(3x + 2) = 6x + 8$;
 б) $2(5 - x) - 5(2x - 3) = 1$; г) $44 - 10(3 - 4x) = 7(5x + 2)$.
- 693** Представьте в виде многочлена стандартного вида:
 а) $x(2x^2 - 3x + 1) + 2x(3 + 2x - x^2)$;
 б) $m(m^2 - mn + n^2) - n(m^2 + mn + n^2)$;
 в) $2p(1 - p - 3p^2) - 3p(2 - p - 2p^2)$;
 г) $2c(5a - 3c^2) - c(a - 6c^2) + 3a(a - c)$.
- 694** Упростите выражение:
 а) $(m(3m - 2n) - m(3n - 2m))n$;
 б) $b(a(a - b) - b(a + b)) - a(b(a - b) - a(a + b))$.

- 695** Составьте выражение по условию задачи и преобразуйте его в многочлен:
 а) Катер плыл по течению реки 3 ч и против течения 4 ч. Какое расстояние прошёл катер за это время, если собственная скорость катера x км/ч, а скорость течения реки t км/ч?
 б) Лодка отплыла от пристани и плыла по течению реки 2 ч, затем она повернула и плыла ещё 2 ч против течения. Сколько километров она не доплыла до пристани, если её собственная скорость равна v км/ч, а скорость течения реки a км/ч? Зависит ли ответ этой задачи от собственной скорости лодки?



696 Решите уравнение:

а) $\frac{1}{3}(x+1) - \frac{2}{3}(x-1) = \frac{2}{3}(x-3)$;

б) $\frac{1}{2}(3x+7) - \frac{3}{4}(2x-2) = \frac{3}{4}(x+1)$;

в) $x(x-3) + x(2x-1) = 3x(x-2) - 3$;

г) $3 + 2x(3x-4) = 4x(2x+5) - 2x(x-1)$;

д) $x(x+1)(x-10) = (x-1)(x-3)(x-5)$;

е) $(x-1)(x-4)(x+7) = x(x+1)^2$.

■ ДОКАЗЫВАЕМ (697–700) ■

697 Докажите, что:

а) $a(b-c+d) - b(c-d+a) + c(a+b-d) - d(a+b-c) = 0$;

б) $xyz(x-1) - xyz(y-1) - xyz(z-1) - xyz = xyz(x-y-z)$.

698 Докажите, что:

а) если $a+b+c=0$, то

$$a(bc-1) + b(ac-1) + c(ab-1) = 3abc;$$

б) если $ab+ac+bc=0$, то

$$a(a-b) + b(b-c) + c(c-a) = a^2 + b^2 + c^2.$$

699 Докажите, что если $a^2 = b^2 + c^2$, то

$$(bc-a)a - (ac-b)b - (ab-c)c = -abc.$$

700 Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то:

а) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; б) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$; в) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$.

Проиллюстрируйте доказанное утверждение примером.

701 **■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■** Найдите значение выражения при заданном значении переменной:

а) $c(3c^2 - 5c - 1) - 4c(3c^2 - 5c - 2) + 3c(3c^2 - 5c + 1)$; $c = 2,75$;

б) $2m(3 - m + 5m^2) + 3m(1 - m + 5m^2) - 5m(5m^2 - m)$; $m = \frac{1}{6}$;

в) $3a(a^2 + 3a + 2) - 4a(a^2 + 3a + 1) + 2a(a^2 + 3a - 1)$; $a = -5$.

Образец. Преобразования можно сделать проще, если ввести замену. Например, в пункте а обозначьте $3c^2 - 5c$ буквой x и запишите выражение в виде

$$c(x-1) - 4c(x-2) + 3c(x+1) = \dots$$

Закончите преобразование.

7.4 Умножение многочлена на многочлен

Рассмотрим, как можно умножить многочлен на многочлен на примере произведения

$$(a + b)(c + d).$$

Обозначим двучлен $a + b$ какой-либо одной буквой, например буквой x , и раскроем скобки в произведении $x(c + d)$ по правилу умножения одночлена на многочлен. Затем букву x заменим двучленом $a + b$ и опять раскроем скобки. Получим

$$\underbrace{(a + b)}_x (c + d) = x(c + d) = xc + xd = (a + b)c + (a + b)d = \\ = ac + bc + ad + bd.$$

Таким образом,

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

С помощью рисунка 7.3 полученное равенство для положительных a , b , c и d можно доказать геометрически: площадь прямоугольника со сторонами $a + b$ и $c + d$ равна сумме площадей четырёх прямоугольников, стороны которых равны a и c , b и c , a и d , b и d . Интересно, что именно так, используя правила вычисления площадей, получали подобные равенства учёные Древней Греции. Величины они изображали отрезками, произведение ab называли прямоугольником, выражение a^2 — квадратом. Такая алгебра, оперировавшая не числами, а отрезками, площадями, объёмами, т. е. выраженная геометрическим языком, много веков спустя была названа *геометрической алгеброй*.

Умножив многочлен $a + b$ на многочлен $c + d$, мы получили многочлен $ac + bc + ad + bd$.

Вообще, произведение двух многочленов всегда можно представить в виде многочлена.

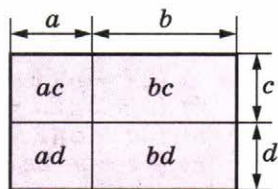


Рис. 7.3

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

Пример. Умножим многочлен $a - b + c$ на многочлен $a + b - c$:

$$(a - b + c)(a + b - c) = \\ = a^2 - \underline{ab} + \underline{ac} + \underline{ab} - b^2 + \underline{bc} - \underline{ac} + \underline{bc} - c^2 = \\ = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc.$$

- В произведении $(a + b)(c + d)$ обозначьте двучлен $c + d$ буквой x и проведите преобразования, аналогичные рассмотренным в тексте.
- Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен. Выполните умножение и прокомментируйте свои действия:
а) $(x + 3)(x + 1)$; б) $(a - 4)(a + 3)$.

A

■ ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (702—704) ■

702 Представьте произведение в виде многочлена:

- а) $(c + 8)(c + 2)$; в) $(m - 11)(m - 2)$;
б) $(b + 5)(b - 2)$; г) $(y - 5)(y + 6)$.

Выполните умножение (703—704).

- 703** а) $(2m + 1)(2m + 5)$; д) $(y - 4)(3y - 4)$;
б) $(3x + 2)(x + 3)$; е) $(6a - 5)(6a - 1)$;
в) $(5m - 1)(m + 1)$; ж) $(2b + 3)(3b - 2)$;
г) $(4n + 7)(2n - 3)$; з) $(7z - 2)(z - 3)$.
- 704** а) $(2x - y)(x + y)$; д) $(5x - c)(x - 5c)$;
б) $(a + b)(2a + 3b)$; е) $(4m + 3n)(4m + 3n)$;
в) $(3c + a)(2c - a)$; ж) $(3y - 2v)(3y + 2v)$;
г) $(6z - y)(2z - y)$; з) $(10x + 3z)(10x - 5z)$.

705 Запишите степень двучлена в виде произведения и выполните умножение:

- а) $(x + y)^2$; б) $(a - c)^2$; в) $(m + 2)^2$; г) $(1 - k)^2$.

706 Преобразуйте в многочлен:

- а) $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$; г) $(2y^2 - 3)(y^2 + 2)$; ж) $(a + 2n^2)(a^2 + n)$;
б) $(a^2 - 1)(a^3 - 1)$; д) $(a^2 - b^2)(a - b)$; з) $(x^2 - a)(x^2 + a)$;
в) $(3 + b^3)(b^3 - 4)$; е) $(m^2 + 3n)(m^2 - n)$; и) $(3 + c^3)(5 - c^2)$.

707 ■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■ Иногда удобно умножать многочлены в столбик, подписывая многочлены один под другим и умножая по очереди слева направо каждый член первого многочлена на второй многочлен:

$$\begin{array}{r}
 2a + 3 \\
 \times \downarrow \swarrow \searrow \downarrow \\
 \hline
 5a - 1 \\
 \hline
 10a^2 - 2a \quad \text{— умножили } 2a \text{ на } 5a - 1. \\
 15a - 3 \quad \text{— умножили } 3 \text{ на } 5a - 1. \\
 \hline
 10a^2 + 13a - 3
 \end{array}$$

Выполните таким образом умножение:

- а) $(2m^2 - 5)(m^2 - 2)$; б) $(y + 1)(y^2 + 4y - 3)$.

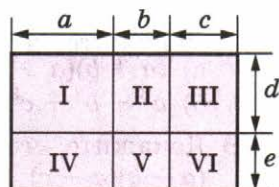
708 ■ МОДЕЛИРУЕМ ■ С помощью рисунка 7.4 проиллюстрируйте равенство $(a+b+c)(d+e) = ad + bd + cd + ae + be + ce$. Докажите это равенство с помощью преобразований.

709 Представьте в виде многочлена:

- а) $(y-1)(y^2+2y-1)$;
 б) $(z^2+3z+2)(z-5)$;
 в) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
 г) $(x^2-xy+y^2)(x-y)$.

710 Упростите выражение:

- а) $(7-2x-x^2)-(x-2)(x+3)$;
 б) $(3m^2+3n^2)-(2m+n)(m+2n)$;
 в) $u(u+v)-(v-1)(u-1)$.



■ Рис. 7.4

711 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Найдите значение выражения при заданном значении переменной:

- а) $(z+2)(z+3)-z(z+1)$, $z=-6,5$;
 б) $(c-5)(c-10)+3c(c+5)$, $c=3,5$.

712 Упростите выражение:

- а) $(n+1)(2n-3)+(n-1)(3n+1)$;
 б) $(x-y)(2x-3y)-(3x-y)(2x+y)$;
 в) $(2a+3)(2a+3)-(2a+1)(2a-1)$;
 г) $(3c-d)(d+3c)+(4c-d)(c-4d)$.

713 Решите уравнение:

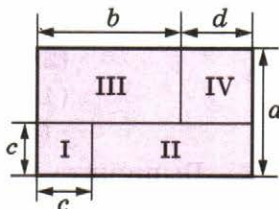
- а) $(x-2)(x-3)=x(x+1)$; в) $(x-5)(x+1)-x=x^2+5$;
 б) $(x+4)(x+6)-x^2=30$; г) $(x-1)(x-3)=(x-2)(x-4)$.

Б

714 ■ МОДЕЛИРУЕМ ■ Составьте два выражения для вычисления площади прямоугольника (рис. 7.5) и запишите соответствующее равенство. Докажите это равенство алгебраически.

715 Выполните умножение:

- а) $(x^2-2x+1)(x^2+2x+1)$;
 б) $(2t-v+s)(t+2v-s)$;
 в) $(y^2-3y-2)(y^2+3y-2)$;
 г) $(a+2b+3c)(2a-b+2c)$.



■ Рис. 7.5

716 Представьте в виде многочлена:

- а) $(x-1)(x-3)(x-5)$; в) $(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)$;
 б) $x(x-1)(x-2)-x^2(x-3)$; г) $(n+1)(n^4-n^3+n^2-n+1)$.

717 Решите уравнение:

а) $x(x+1)(x-10) = (x-1)(x-3)(x-5)$;

б) $(x-1)(x-4)(x+7) = x(x+1)^2$.

■ ДОКАЗЫВАЕМ (718–719) ■

718 Докажите, что:

а) $(a+b)(a+b+2c) = (a+b)(a+b+c) + ac + bc$;

б) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$.

719 Докажите, что если $ac + bc + ac = 0$, то

$(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = a^2 + b^2 + c^2$.

720 Упростите выражение:

а) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 5) - (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 3)$;

б) $(n-1)(n-6)(n^2 - 7n - 3) - (n-3)(n-4)(n^2 - 7n + 1)$.

Подсказка. Сделайте замену; например, в пункте а: $x^2 - 3x = y$.

721 Решите уравнение:

а) $5\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{6} + 7\right) + 12 = 7\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{6} + 7\right) - 4$;

б) $1 - 2\left(\frac{x}{5} - \frac{x}{3} - 5\right) = 14 + \left(\frac{x}{5} - \frac{x}{3} - 6\right)$;

в) $7(2(5x+1)-3) - 15 = 4(2(5x+1)-3)$;

г) $4(3(2x-1)+7) - 4 = 3(3(2x-1)+6)$.

Подсказка. Сделайте замену; например, в пункте а: $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} + 7 = y$; выполнив соответствующую подстановку, решите уравнение.

■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (722–724) ■

722 Дано выражение $(4m - 2n)(m - n)$. Укажите выражения, противоположные данному; равные данному:

$(2n - 4m)(m - n)$; $-(2n - 4m)(m - n)$;

$(2n - 4m)(n - m)$; $(4m - 2n)(n - m)$;

$(4m + 2n)(m + n)$; $(4m - 2n)(m + n)$;

$-(4m - 2n)(m - n)$; $-(4m - 2n)(n - m)$.

723 Выпишите выражения, равные произведению

$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$:

$(1-n)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$; $(n-1)(2-n)(n-3)(4-n)(n-5)$;

$(1-n)(2-n)(3-n)(4-n)(5-n)$; $(1-n)(2-n)(n-3)(4-n)(5-n)$.

724 Представьте каждое произведение в виде многочлена:

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$; $(x-1)(x-2)(x-3)(4-x)$;

$(1-x)(x-2)(x-3)(4-x)$; $-(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

7.5 Формулы квадрата суммы и квадрата разности

- 1** При умножении многочленов встречается несколько особых случаев, знание которых очень полезно. Это, в частности, умножение двучлена на самого себя, т. е. возведение двучлена в квадрат. Преобразуем в многочлен выражение $(a + b)^2$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Таким образом,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Мы получили **формулу квадрата суммы**. В словесной формулировке её обычно читают так:

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

Утверждение, которое выражается формулой квадрата суммы, было известно ещё в древности. Оно описано, например, древнегреческим учёным Евклидом (III в. до н. э.). Доказательство, приведённое Евклидом, вы можете воспроизвести самостоятельно, воспользовавшись рисунком 7.6.

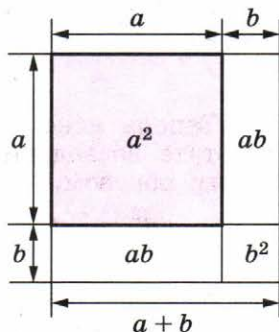


Рис. 7.6

С помощью полученной формулы можно возводить в квадрат сумму любых двух выражений.

Пример 1. Преобразуем в многочлен выражение $(2x + 5y)^2$:

$$(2x + 5y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2.$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

- 2** Аналогично можно получить **формулу квадрата разности**:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Значит,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

Пример 2. Преобразуем в многочлен выражение $(x - 0,5c)^2$:

$$(x - 0,5c)^2 = x^2 - 2x \cdot 0,5c + (0,5c)^2 = x^2 - xc + 0,25c^2.$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Заметим, что для возведения в квадрат двучлена $x - 0,5c$ можно воспользоваться и формулой квадрата суммы. Действительно, двучлен $x - 0,5c$ — это сумма x и $-0,5c$, поэтому

$$(x - 0,5c)^2 = x^2 + 2x \cdot (-0,5c) + (-0,5c)^2 = x^2 - xc + 0,25c^2.$$

Таким образом, мы видим, что при возведении в квадрат двучлена получается трёхчлен. Доказанные формулы позволяют записать этот трёхчлен сразу, не выполняя «длинного» умножения. Поэтому их называют **формулами сокращённого умножения**.

3 Иногда трёхчлен удаётся «свернуть» в квадрат двучлена.

Пример 3. Выясним, можно ли представить в виде квадрата двучлена трёхчлен $a^2 - 10a + 25$.

Первый член трёхчлена — это a^2 , выражение $10a$ — это $2 \cdot 5 \cdot a$, третий член — это 5^2 :

$$a^2 - 10a + 25 = a^2 - 2 \cdot 5 \cdot a + 5^2.$$

Теперь ясно, что данный трёхчлен может быть получен в результате возведения в квадрат двучлена $a - 5$ или двучлена $5 - a$. Таким образом,

$$a^2 - 10a + 25 = (a - 5)^2 \text{ или } a^2 - 10a + 25 = (5 - a)^2.$$

■ Запишите формулы квадрата суммы и квадрата разности. В каждом случае дайте словесную формулировку формулы. Представьте в виде трёхчлена:

а) $(x + y)^2$; б) $(x - y)^2$.

■ Найдите средний член трёхчлена, равного:

а) $(x + 3y)^2$; б) $(5a - 1)^2$; в) $(10 + 3a)^2$.

■ Преобразуйте в трёхчлен выражение, взяв за образец пример 1 или пример 2:

а) $(2a + 3b)^2$; б) $(3a - 4)^2$.

■ Можно ли представить в виде квадрата суммы или разности трёхчлена:

а) $x^2 - 6x + 4$; б) $a^2 + 6a + 9$; в) $m^2 - 4m + 2$?

A

725 ■ РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ ■ Запишите следующие выражения:

а) квадрат суммы x и y ;

д) куб суммы y и z ;

б) сумму квадратов m и n ;

е) квадрат суммы a , b и c ;

в) квадрат разности m и 3 ;

ж) куб суммы m , n и 1 ;

г) разность квадратов a и c ;

з) разность кубов x и z .

■ ДЕЙСТВУЕМ ПО ФОРМУЛЕ (726–729) ■

726 Запишите выражение в виде трёхчлена, пользуясь нужной формулой:

- а) $(t + v)^2$; в) $(p + 1)^2$; д) $(c - x)^2$; ж) $(z - 5)^2$;
 б) $(m - n)^2$; г) $(y - 2)^2$; е) $(3 + a)^2$; з) $(b + 6)^2$.

727 Представьте квадрат двучлена в виде трёхчлена:

- а) $(2x - 1)^2$; в) $(4z - 3)^2$; д) $(4 - 2b)^2$; ж) $(1 - 2k)^2$;
 б) $(5y + 1)^2$; г) $(3a + 2)^2$; е) $(3 + 6c)^2$; з) $(5 + 3t)^2$.

728 Выполните возведение в квадрат:

- а) $(2x + 3y)^2$; в) $(4u - 3t)^2$; д) $(ab + 2)^2$; ж) $(1 - xz)^2$;
 б) $(3a - 2b)^2$; г) $\left(2m + \frac{1}{2}n\right)^2$; е) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$; з) $\left(y + \frac{1}{y}\right)^2$.

729 Преобразуйте в многочлен:

- а) $(x^2 + 3)^2$; в) $(1 - m^3)^2$; д) $(2y^2 - 3x^2)^2$;
 б) $(a^2 - 2)^2$; г) $(5 + c^3)^2$; е) $(x^2y^2 + 1)^2$.

730 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■ Докажите, что:

- а) $(a - b)^2 = (b - a)^2$; б) $(x + y)^2 = (-x - y)^2$.

731 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ С использованием формул квадрата суммы или квадрата разности можно в некоторых случаях легко выполнять возведение в квадрат чисел без умножения столбиком и без калькулятора. Например:

$$71^2 = (70 + 1)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041;$$

$$59^2 = (60 - 1)^2 = 3600 - 120 + 1 = 3481.$$

Вычислите таким же способом: а) 52^2 ; б) 98^2 ; в) $\left(9\frac{1}{2}\right)^2$; г) $\left(9\frac{9}{10}\right)^2$.

732 Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена:

- а) $a^2 + 2a + 1$; д) $a^2 - 6ab + 9b^2$; и) $a^2b^2 + 2ab + 1$;
 б) $x^2 - 2x + 1$; е) $4x^2 + 4xy + y^2$; к) $x^4 - 2x^2 + 1$;
 в) $y^2 + 10y + 25$; ж) $81z^2 - 18az + a^2$; л) $y^6 + 2y^3 + 1$;
 г) $4 - 20c + 25c^2$; з) $9n^2 + 12mn + 4m^2$; м) $a^4 - 2a^2b + b^2$.

■ РАССУЖДАЕМ (733–734) ■

733 Заполните пропуски:

- а) $(2x + \dots)^2 = \dots + \dots + y^2$; в) $(\dots + 2m)^2 = 4n^2 + \dots + \dots$;
 б) $(3y - \dots)^2 = \dots - 24y + \dots$; г) $(\dots - \dots)^2 = a^2 - \dots + 9$.

734 Подберите такое k , чтобы трёхчлен был равен квадрату двучлена:

- а) $a^2 - 2a + k$; в) $m^2 + km + 16$; д) $k - 6n + n^2$;
 б) $x^2 + 6x + k$; г) $y^2 + ky + 25$; е) $k + 8ab + b^2$.

735 Упростите выражение:

- а) $(x + 4)^2 - 7x$; д) $9m^2 - (n - 3m)^2$;
 б) $(c - 1)^2 - (1 - 2c)$; е) $(a^2 + b^2) - (a - b)^2$;
 в) $(x - y)^2 + x(y - x)$; ж) $z(5 - z) + (z - 5)^2$;
 г) $(a + b)^2 - 2b(a - b)$; з) $3u(u + 2) - (u + 3)^2$.

736 Преобразуйте в многочлен:

- а) $2(a - 3)^2$; в) $-5(1 - 2c)^2$; д) $0,1(a + 5)^2$;
 б) $3(x + y)^2$; г) $-4(3m + n)^2$; е) $-\frac{1}{2}(2u - v)^2$.

737 Решите уравнение:

- а) $(x + 3)^2 - x^2 = 33$; в) $(x + 12)^2 = x(x + 8)$;
 б) $x^2 - (x - 5)^2 = 10$; г) $(x - 3)(x + 1) = (x - 2)^2$.

738 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■ Докажите, что:

- а) $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$; в) $a(a + b) + b(a + b) = (a + b)^2$;
 б) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$; г) $(a - b)^2 = a(a - b) - b(a - b)$.

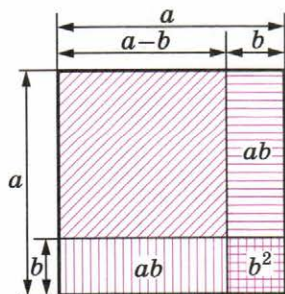
739 ■ МОДЕЛИРУЕМ ■ Проиллюстрируйте с помощью рисунка 7.7 формулу $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Б

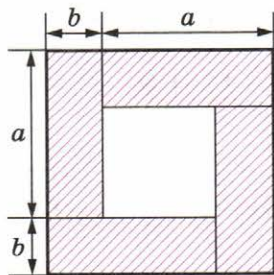
■ МОДЕЛИРУЕМ И ДОКАЗЫВАЕМ (740–741) ■

740 Докажите, что $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$. Поясните это равенство с помощью рисунка 7.8.

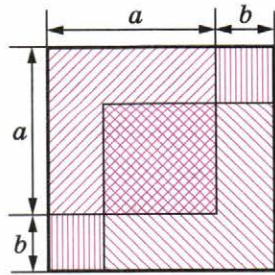
741 Докажите, что $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Поясните это равенство с помощью рисунка 7.9.



■ Рис. 7.7



■ Рис. 7.8



■ Рис. 7.9

742 Укажите пары равных выражений, пары противоположных выражений:

а) $(a - b)^2$, $(b - a)^2$, $-(a - b)^2$;

б) $(a - b)^3$, $(b - a)^3$, $-(b - a)^3$;

в) $(a - b)^4$, $(b - a)^4$, $-(b - a)^4$.

743 Выполните действия, используя формулы сокращённого умножения:

а) $(x - 3)(3 - x)$;

в) $(3x + 2y)(-3x - 2y)$;

б) $(2a^2 - b)(b - 2a^2)$;

г) $(-c^2 - 2d)(c^2 + 2d)$.

744 Упростите выражение:

а) $(y + 2)^2 - 2(y + 1)^2$;

в) $(3 - 5x)^2 - (3x - 2)(5x + 1)$;

б) $4(2 - x)^2 + 5(x - 5)^2$;

г) $6(a - 2)(a - 3) - 4(a - 3)^2$.

745 Упростите выражение:

а) $(m^2 + n - 4)^2 - (m^2 + n - 1)(m^2 + n - 8)$;

б) $(2x^2 + x - 5)^2 - (2x^2 + x)(2x^2 + x - 1) + 9(2x^2 + x)$.

Подсказка. Сделайте удобную замену.

■ ДОКАЗЫВАЕМ (746–748) ■

746 Докажите, что:

а) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$;

б) $(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$;

в) $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = ab$;

г) $-\frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{4} = ab$.

747 Выведите формулу куба суммы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Пользуясь этой формулой, преобразуйте выражение:

а) $(x + y)^3$; б) $(x + 2y)^3$.

748 Выведите формулу куба разности

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

С помощью этой формулы представьте в виде многочлена:

а) $(x - y)^3$; б) $(3x - y)^3$.

749 Пользуясь формулами квадрата суммы и квадрата разности, представьте в виде многочлена выражение:

а) $(a + b)^4$; б) $(a - b)^4$.

750 Представьте в виде квадрата двучлена:

а) $(2a + 3b)^2 - 8b(2a + b)$;

б) $(3x - 2y)^2 + 5x(4y - x)$.

■ ДОКАЗЫВАЕМ (751–752) ■

751 Докажите, что если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

752 Докажите равенство:

а) $(a - 1)^2 + 2(a - 1) + 1 = a^2$;

б) $(1 - a)^2 + 2a(1 - a) + a^2 = 1$;

в) $(x + 1)^2 - 4(x + 1) + 4 = (x - 1)^2$;

г) $(x + y)^2 - 2(x + y)(x - y) + (x - y)^2 = 4y^2$.

Выделите квадрат двучлена (753–754).

753 а) $a^2 + 6a - 10$; г) $x^2 + 3x - 0,25$;

б) $x^2 - 4x + 1$; д) $a^2 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}$;

в) $c^2 + 10c$; е) $b^2 + b + 1$.

Образец.

$$x^2 - 8x + 9 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16 - 16 + 9 = (x - 4)^2 - 7.$$

754 а) $a^2 + 3ab + b^2$; в) $m^2 - mn + n^2$;

б) $x^2 + xy + y^2$; г) $4a^2 + 5ac + c^2$.

■ РАССУЖДАЕМ (755–756) ■

755 Дополните равенство:

а) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 \dots$; б) $x^2 + y^2 = (x - y)^2 \dots$.

756 Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$, если:

а) $x + \frac{1}{x} = 2,5$; б) $x - \frac{1}{x} = 2$.

757 ■ ИССЛЕДУЕМ ■ 1) Используя формулу квадрата двучлена, возведите в квадрат трёхчлен $a + b + c$. (Указание. Сделайте замену $a + b = x$.) Проиллюстрируйте полученное равенство геометрически, изобразив квадрат со стороной $a + b + c$.

2) С помощью полученной формулы возведите в квадрат:

$$a - b + c; \quad a - b - c.$$

3) По аналогии с формулой, полученной в п. 1, запишите формулу для преобразования в многочлен выражения $(a + b + c + d)^2$. Проверьте с помощью умножения, верно ли записанное равенство.

4) Пользуясь выведенной формулой, возведите в квадрат

$$a + b - c + d.$$

7.6 Решение задач с помощью уравнений

При составлении уравнений по условию задачи часто используют рисунки, схемы, которые помогают проанализировать условие задачи, организовать её данные.

- 1** **Пример 1.** Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 22,5 км, и встретились через 3 ч. С какой скоростью шёл каждый из них, если известно, что скорость одного на 1,5 км/ч больше скорости другого?

Если x км/ч — это скорость, с которой шёл первый турист, то скорость второго туриста $x + 1,5$ км/ч.

Сделаем рисунок, который поможет нам составить уравнение (рис. 7.10).

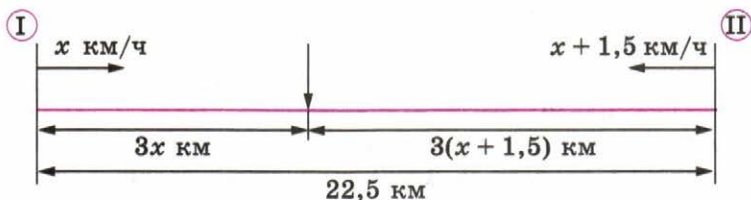


Рис. 7.10

Первый турист прошёл до встречи $3x$ км, а второй прошёл $3(x + 1,5)$ км. В сумме эти расстояния составляют 22,5 км:

$$3x + 3(x + 1,5) = 22,5.$$

Решим это уравнение:

$$\begin{aligned} x + (x + 1,5) &= 7,5, \\ 2x &= 6, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Первый турист шёл со скоростью 3 км/ч, а второй — со скоростью $3 + 1,5 = 4,5$ км/ч.

Ответ. 3 км/ч, 4,5 км/ч.

- 2** **Пример 2.** Виктор выходит из дома и идёт в школу со скоростью 60 м/мин. Через 8 мин вслед за ним из этого же дома выходит Иван и идёт той же дорогой со скоростью 100 м/мин. В школу они приходят одновременно. Чему равно расстояние от дома до школы?

Обозначим расстояние до школы (в м) буквой x . Тогда Виктор идёт до школы $\frac{x}{60}$ мин, а Иван — $\frac{x}{100}$ мин.

Уравнение нетрудно составить, если понять, что условие задачи можно сформулировать иначе: «Виктор шёл в школу на 8 мин дольше, чем Иван». Поэтому

$$\frac{x}{60} - \frac{x}{100} = 8.$$

Решим это уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{x}{60} \cdot 300 - \frac{x}{100} \cdot 300 &= 8 \cdot 300, \\ 5x - 3x &= 2400, \\ 2x &= 2400, \\ x &= 1200.\end{aligned}$$

Ответ. 1200 м.

Если буквой x обозначить время движения Виктора (в мин), то получится более простое уравнение:

$$\underbrace{\text{Расстояние, которое прошёл Виктор}}_{60x} = \underbrace{\text{Расстояние, которое прошёл Иван}}_{100(x-8)}$$

Решите это уравнение. Не забудьте, что, используя найденное значение x , надо ещё найти расстояние от дома до школы.

3 Пример 3. Имеется прямоугольный кусок стекла, одна из сторон которого на 30 см больше другой. Чтобы вставить его в оконную раму, его длину и ширину пришлось уменьшить на 10 см. Площадь обрезков составила 1400 см^2 . Чему были равны первоначальные размеры стекла?

Пусть x см — длина меньшей стороны куска стекла, тогда $x + 30$ см — длина другой его стороны.

Сделаем рисунок (рис. 7.11) и составим уравнение:

$$\underbrace{\text{Первоначальная площадь куска стекла}}_{x(x+30)} - \underbrace{\text{Площадь уменьшенного куска стекла}}_{(x-10)(x+20)} = \underbrace{\text{Площадь обрезков}}_{1400}$$

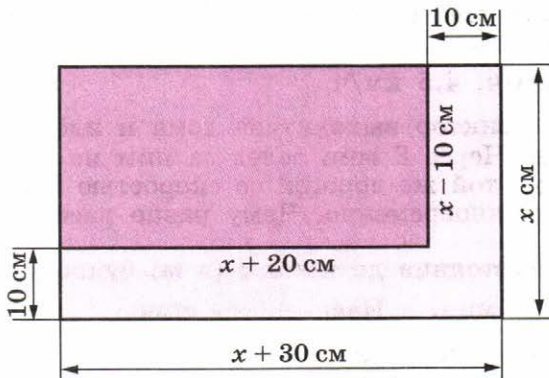


Рис. 7.11

Решим уравнение:

$$\begin{aligned}x(x + 30) - (x - 10)(x + 20) &= 1400, \\x^2 + 30x - (x^2 + 20x - 10x - 200) &= 1400, \\x^2 + 30x - x^2 - 20x + 10x + 200 &= 1400, \\20x + 200 &= 1400, \\20x &= 1200, \\x = 60, \quad x + 30 &= 90.\end{aligned}$$

Ответ. 60 см, 90 см.

- Составьте уравнение по условию задачи, взяв за образец пример 1:
«Автомобиль и автобус, находящиеся на расстоянии 30 км друг от друга, одновременно начали движение навстречу друг другу. Они встретились через 12 мин. Скорость автомобиля в 1,5 раза больше скорости автобуса. Чему равна скорость автобуса?»
- Как ещё можно переформулировать условие задачи о восьми минутах в примере 2? Составьте уравнение по условию этой задачи, обозначив буквой x время движения Ивана.
- По образцу примера 3 сделайте рисунок, моделирующий условие задачи, и составьте уравнение:
«Имеется кусок стекла, одна из сторон которого в 2 раза больше другой. Чтобы вставить его в оконную раму, его длину и ширину пришлось уменьшить на 20 см. Площадь обрезков составила 3800 см². Чему были равны первоначальные размеры стекла?»

А

Решите задачу (чтобы легче было составить уравнение, сделайте рисунок, 758—760).

- 758** а) Турист вышел из пункта A по направлению к пункту B , расстояние до которого равно 9 км. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист, скорость которого на 10 км/ч больше скорости туриста. Через 0,5 ч они встретились. Определите скорость, с которой шёл турист.
- б) Два мальчика выбегают одновременно навстречу друг другу из двух точек, расстояние между которыми 660 м, и встречаются через 2 мин. Один из них пробегает на 30 м в минуту меньше, чем другой. Сколько метров в минуту пробегает каждый из них?
- 759** а) Расстояние между двумя железнодорожными станциями A и B равно 300 км. От станции A по направлению к станции B вышел пассажирский поезд. Одновременно навстречу ему от станции B вышел электропоезд, скорость которого на 30 км/ч меньше скорости пассажирского поезда. Они встретились через 2 ч на разъезде. На каком расстоянии от A и от B находится разъезд?

б) Расстояние между домами Андрея и Бориса, расположенными на одном шоссе, 2 км. Они выходят одновременно из своих домов навстречу друг другу и встречаются через 0,2 ч. Скорость Андрея на 1 км/ч больше скорости Бориса. На каком расстоянии от дома Бориса произошла встреча?

Подсказка. Задачу легче решить, если обозначить буквой какую-нибудь из скоростей.

760 а) Два поезда, встретившись на разъезде, продолжали движение каждый в своём направлении. Скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого. Через 3 ч расстояние между ними было 480 км. Найдите скорость каждого поезда.

б) Два автомобиля едут по шоссе навстречу друг другу. Скорость одного из них на 10 км/ч меньше скорости другого. Через 2 ч после того, как они встретились, расстояние между ними стало равным 260 км. Найдите скорость каждого автомобиля.

761 Решите задачу (переформируйте условие так, чтобы было легче составить уравнение):

а) От станции к озеру вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 0,5 ч вслед за ним от этой же станции и по той же дороге отправился велосипедист со скоростью 12 км/ч. К озеру они прибыли одновременно. Определите, сколько времени шёл пешеход и чему равно расстояние от станции до озера.

б) Из города Новый в город Молодёжный одновременно выезжают автобус и легковой автомобиль. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости автобуса. Автомобиль приезжает в город Молодёжный на 2 ч раньше автобуса. Определите скорость, с которой ехал автобус, и расстояние между городами.

Решите задачу на движение по реке (**762—763**).

762 а) Катер по течению реки прошёл за 3,5 ч такое же расстояние, какое он проходит за 4 ч против течения реки. Собственная скорость катера 30 км/ч. Определите скорость течения реки. Какое расстояние прошёл катер по течению реки?

б) Теплоход прошёл расстояние между пристанями по течению реки за 4 ч, а против течения реки за 5 ч. Определите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 2 км/ч. Чему равно расстояние между пристанями?

763 а) Лодка проплыла некоторое расстояние от пристани по течению реки и вернулась обратно, затратив на весь путь 8 ч. Собственная скорость лодки 8 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч. Определите, сколько времени плыла лодка по течению реки и всё расстояние, которое она проплыла.

б) Пловец плыл 10 мин по течению реки и 15 мин против течения и проплыл всего 2100 м. Определите собственную скорость пловца (в м/мин), если скорость течения реки 30 м/мин.

Решите задачу (сделайте рисунок по условию задачи, 764—765).

- 764** а) Площадь квадрата равна площади прямоугольника, одна из сторон которого на 1 см меньше стороны квадрата, а другая на 2 см больше стороны квадрата. Найдите длину стороны квадрата и длины сторон прямоугольника.

б) Площадь квадрата на 63 см^2 больше площади прямоугольника. Одна из сторон прямоугольника на 3 см больше, а другая на 6 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь квадрата.

- 765** а) Пекарня использует для выпечки тортов формы двух видов, имеющие одинаковую площадь дна. У одной из них дно квадратное, а у другой — прямоугольное. Длина прямоугольной формы на 8 см больше, а ширина на 6 см меньше, чем сторона квадратной формы. Найдите размеры дна каждой формы.

б) Под строительство был отведён участок земли, имеющий форму квадрата. Площадь этого участка пришлось увеличить на 830 м^2 . Для этого одну из сторон первоначального участка увеличили на 4 м, а другую — на 5 м и получили новый участок прямоугольной формы. Чему была равна площадь первоначального участка?



Решите задачу (766—767).

- 766** а) Через 3 дня после того, как Пётр начал читать книгу, эту же книгу начал читать Алексей. Закончили чтение они одновременно. Пётр прочитывал по 10 страниц в день, а Алексей — по 16 страниц в день. Сколько страниц в книге?

б) Два студента взялись набрать рукопись, разделив её между собой на две равные части. Через 4 дня после того, как первый начал работу, к работе приступил второй. Закончили они работу одновременно. Первый студент набирал по 24 страницы в день, а второй — по 40 страниц. Сколько дней работал каждый студент и сколько страниц они набрали вместе?

- 767** а) Щенку 37 дней, а котёнку 7 дней. Через сколько дней щенок станет в 3 раза старше котёнка?

б) Два года назад брат был младше сестры в 3 раза, а сейчас он младше сестры в 2 раза. Сколько сейчас лет брату и сколько сестре?

Решите задачу (768—780).

768 Расстояние между городами A и B равно 244 км. Из A в B выехал автобус, а через 36 мин ему навстречу из B в A выехал автомобиль со скоростью, большей скорости автобуса на 30 км/ч. Через 2 ч после своего выезда автомобиль встретил автобус. Найдите скорость автомобиля.

769 Расстояние между городами A и B равно 240 км. Из города A в город B выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч, а через 30 мин навстречу ему из города B выехал мотоциклист со скоростью, меньшей скорости автомобиля на 20 км/ч. Через какое время после выезда мотоциклиста автомобиль и мотоцикл будут на расстоянии 20 км друг от друга?

Подсказка. Обратите внимание на то, что надо рассмотреть два случая.

770 От автовокзала по шоссе выехал автобус со скоростью 45 км/ч. Через 20 мин вслед за ним выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Через какое время после выезда автомобиля расстояние между ними будет равно 10 км?

771 Мотоцикл, движущийся по шоссе со скоростью 40 км/ч, миновал бензоколонку. Через час мимо той же бензоколонки проехал автомобиль со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от бензоколонки автомобиль догнал мотоциклиста?

772 Если автомобиль будет ехать со скоростью 60 км/ч, он придет из пункта A в пункт B в назначенное время. Проехав полпути со скоростью 60 км/ч, автомобиль увеличил скорость на 20 км/ч и приехал в пункт B на четверть часа раньше назначенного времени. Определите, за какое время автомобиль должен был доехать от пункта A до пункта B .

773 Автобус обычно проходит свой маршрут от начальной до конечной остановки за 54 мин. Однако во время часа пик его скорость была на 10 км/ч меньше, и через 45 мин ему ещё оставалось проехать 12 км. Чему равна обычная скорость автобуса?

774 Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 4 км, одновременно выходит пешеход и выезжает велосипедист. Велосипедист доезжает до пункта B , сразу поворачивает обратно и встречает пешехода через 24 мин после своего выезда из пункта A . Определите скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что велосипедист проезжает в час на 10 км больше, чем проходит пешеход.

- 775** Прогулочный речной катер на маршрут к базе отдыха и обратно затрачивает 2 ч 40 мин. На каком расстоянии от начала маршрута находится база отдыха, если собственная скорость катера 35 км/ч, скорость течения реки 5 км/ч и возле базы отдыха катер делает остановку на 1,5 ч?
- 776** Вниз по течению реки мимо пристани проплыл плот. Через 10 мин от этой пристани отошёл катер в том же направлении. Собственная скорость катера 35 км/ч, скорость течения реки 5 км/ч. Катер обогнал плот и причалил к следующей пристани, а через 11 мин мимо неё проплыл плот. Чему равно расстояние между пристанями?
- 777** Картинку квадратной формы наклеили на белую бумагу, в результате получилась белая окантовка вокруг всей картинки шириной 5 см. После этого она стала занимать в альбоме площадь на 460 см^2 больше, чем она занимала без окантовки. Найдите размеры и площадь картинки.
- 778** У Наташи есть аквариум с прямоугольным дном, одна сторона которого на 16 см больше другой. Она заменила его большим аквариумом, длина и ширина дна которого на 4 см больше. Она заметила, что если заполнить этот аквариум водой на высоту 30 см, то потребуется на 6 л больше воды, чем требовалось для старого аквариума при заполнении его на такую же высоту. Найдите размеры дна нового аквариума.
- 779** Друзья Томаса Эдисона удивлялись, почему калитка перед его домом открывается с трудом. «Калитка отрегулирована так, как надо, — смеясь, ответил Эдисон, — я сделал от неё привод к цистерне, и каждый входящий накачивает в цистерну 20 л воды». Если бы каждый посетитель накачивал в цистерну на 5 л воды больше, то для заполнения цистерны понадобилось бы на 12 человек меньше. Сколько воды вмещала цистерна?
- 780** (Старинная задача.) По контракту работникам причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с них взыскивается по 12 франков. Через 30 дней выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней они отработали за этот период?



7.7 Деление с остатком

(Для тех, кому интересно)

Поговорим ещё раз о делимости натуральных чисел.

Если число a делится на число b , то это значит, что существует такое натуральное число q , что $a = bq$. Однако чаще всего одно натуральное число на другое не делится и в результате деления получается остаток.

Разделим, например, 3587 на 24:

$$\begin{array}{r}
 3587 \overline{) 24} \\
 \underline{24} \\
 118 \\
 \underline{96} \\
 227 \\
 \underline{216} \\
 11
 \end{array}$$

Получим неполное частное, равное 149, и остаток, равный 11. Поэтому число 3587 можно записать в виде суммы:

$$3587 = 24 \cdot 149 + 11.$$

Точно так же обстоит дело и для любых натуральных чисел. А именно, если при делении числа a на число b получается неполное частное q и остаток r , то $a = bq + r$; при этом число r (как остаток от деления на b) обязательно меньше b .

Если a делится на b без остатка, то можно записать, что $a = bq + 0$. Поэтому в таком случае удобно считать, что получается нулевой остаток.

Заметим, что даже в том случае, когда $a < b$, можно говорить о делении a на b с остатком. Пусть $a = 2$, $b = 5$; тогда можно считать, что неполное частное равно 0, а остаток равен 2, т. е. $2 = 5 \cdot 0 + 2$.

Другими словами, если есть два натуральных числа a и b , то можно записать равенство

$$a = bq + r,$$

где r либо натуральное число, меньшее b , либо равно 0.

Это позволяет разбивать множество целых неотрицательных чисел на классы по остаткам от деления на заданное число. Количество таких классов равно количеству возможных остатков.

Например, при делении на 3 получаются остатки 0, 1 и 2. Поэтому множество целых неотрицательных чисел делится на три класса: числа вида $3n$, числа вида $3n + 1$, числа вида $3n + 2$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

781 На какие классы разбивается множество неотрицательных целых чисел по остаткам от деления на 2? на 5? на 8? Приведите пример числа каждого вида.

- 782** Докажите, что:
- а) сумма чётного и нечётного чисел есть число нечётное;
 - б) сумма двух нечётных чисел есть число чётное;
 - в) сумма двух последовательных натуральных чисел есть число нечётное;
 - г) произведение двух последовательных натуральных чисел есть число чётное.
- 783** Найдите остаток от деления на 10 суммы чисел a , b и c , если известно, что:
- а) при делении на 10 число a даёт в остатке 1, число b даёт в остатке 3 и число c даёт в остатке 5;
 - б) при делении на 10 число a даёт в остатке 3, число b даёт в остатке 5 и число c даёт в остатке 7.
- 784** а) Числа a и b при делении на 7 дают в остатке соответственно 3 и 4. Докажите, что $a + b$ делится на 7.
 б) Числа a и b при делении на 6 дают в остатке соответственно 1 и 3. Докажите, что их сумма есть число чётное.
- 785** Докажите, что если числа a и b при делении на число c дают один и тот же остаток, то их разность делится на c .
- 786** Каждое из чисел a и b при делении на 3 даёт в остатке 1. Докажите, что их произведение при делении на 3 также даёт в остатке 1.
- 787** Докажите, что если числа a и b не делятся на 3, то либо их сумма, либо их разность делится на 3.
- 788** Какой вид имеют числа, о которых известно, что они не делятся ни на 2, ни на 3?
- 789** а) Докажите, что если число не делится на 5, то на 5 делится его квадрат, увеличенный или уменьшенный на 1.
 б) Докажите, что квадрат любого нечётного числа при делении на 8 даёт в остатке 1.
- 790** Найдите все натуральные числа, которые:
- а) при делении на 5 дают в остатке 4, а при делении на 2 дают в остатке 1;
 - б) при делении на 5 дают в остатке 3 и делятся на 2.

Дополнительные задания

Действия с многочленами

- 791** Докажите, что:
- а) $(c + 1)(c - 3) + (c - 1)(c + 3) + 6 = 2c^2$;
 - б) $(a^2 - 2)(a + 1) - (a^2 + 1)(a - 2) + 3a = 3a^2$;
 - в) $(y + 1)(y + 2)(y - 3) - y(y^2 - 7) + 6 = 0$;
 - г) $b(b - 1)(b + 2) + b(b + 1)(b - 2) - 2b(b^2 - 2) = 0$.

792 Найдите значение выражения:

а) $(2x - c)(x + c) - (2c + x)(x - c) + x(2 - x)$ при $c = 0,7$, $x = -1$; $c = -0,2$, $x = -0,5$;

б) $(2x^2 + x + 1)(x - 2) + 2x^2(2 - x) - (x^2 - 1)$ при $x = 0,3$; $x = -0,2$;

в) $(a^2 - 2a + 3)(a - 3) - 9(a - 1) + a(5a + 6)$ при $a = -\frac{1}{2}$; $a = \frac{1}{3}$.

793 Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.

794 Найдите значение выражения:

а) $(x + 1)^2(x + 2) - (x - 1)^2(x - 2)$ при $x = \frac{1}{4}$; $x = -\frac{1}{6}$;

б) $(1 + y)(2 - y)^2 - (2 + y)(1 - y)^2 - 3(1 - y^2)$ при $y = -1,4$; $y = 2,5$.

795 Упростите выражение:

а) $(2n + 3)(n + 1) + (4n - 1)(n - 1) + 2$;

б) $(2n^2 - 1)(n + 1) - (n^2 + 1)(2n - 1)$;

в) $((b + c)^2 - (b^2 + c^2))^3 - (3bc)^3$;

г) $((m - n)^2 + 2mn)^3 - 3m^2n^2(m^2 + n^2)$;

д) $((x - y)^3 + 3xy(x - y))^2 + 2x^3y^3$;

е) $((y + z)^3 - (y^3 + z^3))^2 - 18y^3z^3$.

Решение уравнений и задач

Решите уравнение (796—797).

796 а) $4(1,5x - 3) - 5,5x = 10$;

в) $3(x - 1) = 3x - 4(8x + 1)$;

б) $0,6x = 0,3 - 3(x + 2,5)$;

г) $8(x - 8) + 2(1 - 2x) = 11$.

797 а) $x(x - 1) - x(x - 3) = 12$;

в) $(x - 4)^2 = x^2 - 16$;

б) $(x + 1)(x + 2) - x^2 = 5x + 4$;

г) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$.

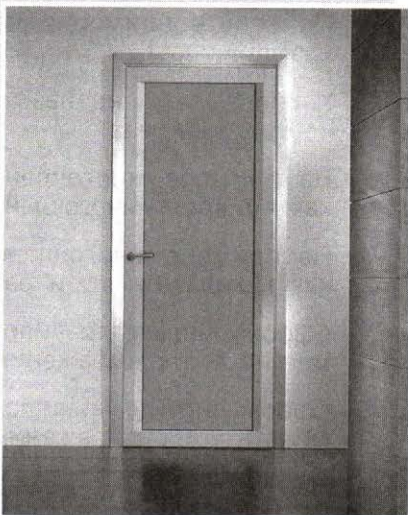
Решите задачу (798—810).

798 Расстояние, равное 40 км, велосипедист проехал за 3 ч. Первый час он ехал со скоростью, на 2 км/ч меньшей, чем в оставшееся время. Определите первоначальную скорость велосипедиста.

799 Товарный поезд вышел со станции и до первой остановки шёл со скоростью 35 км/ч. После остановки он увеличил скорость до 45 км/ч и до следующей остановки находился в пути на 1 ч меньше. Весь путь составил 195 км. Определите, сколько времени шёл поезд до первой остановки и на каком расстоянии от станции она произошла.

800 Два спортсмена бегут навстречу друг другу по круговой дорожке, длина которой 1 км. Скорость одного из них 140 м/мин, а другого — 160 м/мин. В некоторый момент времени они встречаются. Через сколько минут они встретятся в следующий раз?

- 801** Одна швея шила фартуки 3 дня, а другая швея шила такие же фартуки 7 дней. Вместе они сшили 135 фартуков. Сколько фартуков в день шила первая швея, если известно, что вторая швея ежедневно шила на 5 фартуков меньше, чем первая?
- 802** Первый токарь работал 3 ч, а второй — 4 ч, и вместе они обточили 75 деталей. Сколько деталей обточил каждый токарь в отдельности, если известно, что первый токарь обтачивал в час на 3 детали меньше, чем второй?
- 803** На двух автоматических линиях было упаковано 650 одинаковых коробок конфет. Первые 2 ч работала одна линия, а затем две линии вместе. Определите время работы каждой линии, если известно, что производительность второй линии 100 коробок в час, а первой — на 30 коробок меньше.
- 804** Две автоматические линии расфасовали 460 одинаковых пакетов крупы за 6 ч. Первый час работала одна линия, следующие 2 ч — вторая, а в оставшееся время работали обе линии вместе. Определите производительность каждой линии, если известно, что на первой линии за 1 ч фасуется на 20 пакетов меньше, чем на второй.
- 805** Машинистка должна была выполнить набор рукописи на компьютере за 6 дней. Однако она набирала каждый день на 5 страниц больше, и за 2 дня до срока ей оставалось набрать 30 страниц. Сколько страниц в день набирала машинистка?
- 806** Высота двери на 30 см больше, чем её удвоенная ширина. Чтобы вставить дверь в дверной проём, её сделали короче на 10 см и уже на 5 см. При этом площадь обрезков составила 1900 см^2 . Определите первоначальные размеры двери.



- 807** Телевизионный экран имеет прямоугольную форму. Одна из его сторон на 6 см меньше другой. Если меньшую сторону увеличить на 1 см, а большую — на 2 см, то площадь изображения увеличится на 65 см^2 . Найдите первоначальные размеры телевизионного экрана.
- 808** Если каждую из сторон земельного участка, имеющего форму квадрата, уменьшить на 3 м, то получится участок, площадь которого будет меньше площади исходного участка на 81 м^2 . Найдите площадь нового участка.
- 809** Периметр прямоугольника равен 38 см. Если одну из его сторон увеличить на 5 см, а другую уменьшить на 3 см, то площадь полученного прямоугольника будет больше площади данного прямоугольника на 16 см^2 . Найдите стороны данного прямоугольника.
- 810** В классе число отсутствующих учеников составляет пятую часть от числа присутствующих. После того как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно четверти числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Приведите пример одночлена стандартного вида. Чему равен его коэффициент?
- 2 Какое выражение называют многочленом? Приведите пример двучлена; трёхчлена.
- 3 На примере многочлена $5xy^2 - x^2y - 2xy \cdot 3y + 7x^2y$ объясните, как приводят многочлен к стандартному виду.
- 4 На примере многочленов $3x^2 - 8x + 4$ и $2x^2 + 6x - 3$ покажите, как находят сумму и разность многочленов.
- 5 Сформулируйте правило умножения одночлена на многочлен и примените его к выражению $2ab(4a - 5b - 1)$.
- 6 Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен и примените его к выражению $(4x - 3y)(2y + x)$.
- 7 Напишите формулы квадрата суммы и квадрата разности и докажите их.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- 1 Найдите значение выражения:
 - а) $1,5x - 2y$ при $x = \frac{1}{3}$, $y = 0,3$;
 - б) $0,5x^3$ при $x = -2$;
 - в) $3x^2 - 5x + 4$ при $x = -1$;
 - г) $-0,4x^3 + 2,5y$ при $x = -5$, $y = -8$.
- 2 Представьте в виде многочлена:
 - а) $(6x^2 - 2x) + (5 + 10x - 5x^2)$;
 - б) $(6xy + 8y) - (2xy + 8y - 1)$.
- 3 Представьте выражение $2ab - b^2 + a^2b - 6b$ в виде суммы и в виде разности двух двучленов.
- 4 Представьте в виде многочлена произведение $4b^3(2b^2 - 3b - 2)$.
- 5 Упростите выражение:
 - а) $3a(a - 2) - 2a(a - 3)$;
 - б) $5b(b - c) + c(2b - c)$.
- 6 Представьте в виде многочлена:
 - а) $(2x + 5)(4 + 3x)$;
 - б) $(1 - a)(5a + 6)$;
 - в) $(2x - y)(3y - 4x)$.
- 7 Упростите выражение:
 - а) $2a(3a - 5) - (a - 3)(a - 7)$;
 - б) $(c + 3)(5 - c) - 3c(1 - c)$.
- 8 Представьте в виде многочлена:
 - а) $(3a + 4)^2$;
 - б) $(2a - 3b)^2$.
- 9 Упростите выражение:
 - а) $(a - b)^2 - a(a + 2b)$;
 - б) $4c(c - 2) - (c - 4)^2$.
- 10 Представьте в виде квадрата двучлена:
 - а) $4 - 4a + a^2$;
 - б) $9a^2 - 6ab + b^2$.
- 11 Решите уравнение:
 - а) $10 - 3(5x - 1,5) = 2,5 - 5x$;
 - б) $2(3x - 4) = 5x - 3(x + 1)$.
- 12 Из пункта *А* в пункт *В*, расстояние между которыми 26 км, выехал велосипедист. Одновременно с ним из пункта *В* в пункт *А* выехал мотоциклист со скоростью, на 28 км/ч большей скорости велосипедиста. Они встретились через 0,5 ч. Найдите скорость мотоциклиста. На каком расстоянии от пункта *А* произошла встреча?
- 13 Площадь прямоугольника равна площади квадрата. Одна из сторон прямоугольника на 2 см меньше стороны квадрата, а другая на 3 см больше стороны квадрата. Найдите площадь квадрата.

Проверьте себя (тест)

- Найдите значение выражения $6a^2 - 2a - 1$ при $a = -\frac{1}{4}$.
- Какова степень многочлена $0,3x^2 - 2x^4 + 1,2$?
1) 2 2) 3 3) 4 4) 6
- Какую степень имеет многочлен, равный произведению многочленов $(x^2 + 3)(x^3 + 2x - 1)$?
1) 2 2) 3 3) 5 4) 6
- Упростите выражение $2x^2y - xy^2 + x^2y - 3xy^2 + 2xy$.
- Среди выражений, записанных ниже, найдите выражение, равное многочлену $2x - 3y - z$.
1) $-(2x - 3y - z)$ 3) $-(3y - 2x + z)$
2) $-(2x + 3y + z)$ 4) $-(3y + 2x - z)$
- Среди приведённых ниже выражений найдите выражение, противоположное многочлену $5a - 8b + 1$.
1) $5a + 8b - 1$ 3) $-5a + 8b + 1$
2) $-5a + 8b - 1$ 4) $-5a - 8b - 1$
- Какой многочлен надо записать вместо многоточия, чтобы равенство было верным: $(-m + n - q) + \dots = 0$?
1) $m - n + q$ 3) $m + n - q$
2) $m - n - q$ 4) $-m - n + q$
- Найдите сумму многочленов $2x^3 - 2x$ и $-x^2 + 2x - 1$.
- В выражение $p - q$ подставьте $p = 12ab - 15ac$, $q = 10ab - 15ac + 2bc$ и упростите получившееся выражение.
- Упростите выражение $5a^2 - 5a(a - 2)$.
- Собственная скорость катера v км/ч, скорость течения реки a км/ч. Катер плыл 3 ч по течению реки и 3 ч против течения. Какое из следующих утверждений верно?
1) за всё время он проплыл такое же расстояние, как плот по течению за 6 ч
2) за всё время он проплыл такое же расстояние, как за 3 ч в стоячей воде
3) за всё время он проплыл такое же расстояние, как за 6 ч в стоячей воде
4) по течению он проплыл такое же расстояние, как против течения

- 12 Выполните умножение $(2a + 3)(4a - 6)$.
- 13 Какое из выражений противоположно произведению $(a - b)(a - c)$?
- 1) $(b - a)(c - a)$ 3) $(b - a)(a - c)$
 2) $-(a - b)(c - a)$ 4) $-(b - a)(a - c)$
- 14 Раскройте скобки в выражении $(2x - 5y)^2$.
- 1) $4x^2 - 25y^2$ 3) $4x^2 - 10xy + 25y^2$
 2) $2x^2 - 10xy + 5y^2$ 4) $4x^2 - 20xy + 25y^2$
- 15 Упростите выражение $3(m - 2)^2 + 12m$.
- 16 Даны выражения:
 А) $(a - 5)^2$ Б) $(5 - a)^2$ В) $-(a - 5)^2$ Г) $-(5 - a)^2$
 Какие из них равны произведению $(a - 5)(5 - a)$?
- 1) А и Б 2) А и В 3) Б и Г 4) В и Г
- 17 Упростите выражение $(1 + xy)^2 - (1 - xy)^2$.
- 1) 0 2) $2xy + 2x^2y^2$ 3) $2x^2y^2$ 4) $4xy$
- 18 Решите уравнение $2(x - 1) - 7 = 5x - 5$.
- 19 Из палаточного лагеря к станции вышел турист со скоростью 6 км/ч. Через 15 мин вслед за ним выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч, обогнал туриста и приехал на станцию на 5 мин раньше его. Чему равно расстояние от лагеря до станции? Какое из следующих уравнений соответствует условию задачи, если буквой x в нём обозначено время движения туриста в часах?
- 1) $12x = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)$ 3) $12x = 6\left(x - \frac{1}{6}\right)$
 2) $6x = 12\left(x - \frac{1}{3}\right)$ 4) $6x = 12\left(x + \frac{1}{6}\right)$
- 20 Найдите ответ на вопрос задачи, сформулированной в задании 19.
- 1) $\frac{2}{3}$ км 2) 4 км 3) $\frac{1}{3}$ км 4) 2 км

Разложение многочленов на множители

В этой главе вы познакомитесь с полезным и часто применяемым приёмом преобразования алгебраических выражений — разложением многочлена на множители. Разложение на множители — это не только наука, но и искусство, овладев которым можно решить самые разные, в том числе достаточно хитрые, уравнения, в чём вы сможете убедиться не только в этой главе, но и во всём дальнейшем курсе математики.

Вам уже известны формулы квадратов суммы и разности, вы не раз применяли их на уроках математики. Не меньшую пользу приносят вам формулы разности квадратов, суммы и разности кубов, с которыми вы познакомитесь в этой главе.

8.1 Вынесение общего множителя за скобки

1 В предыдущей главе рассматривалось умножение многочленов. Однако в математике важна и обратная задача — представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов, среди которых могут быть и одночлены. Такое преобразование называют **разложением многочлена на множители**.

Существует целый ряд приёмов для разложения многочленов на множители. Один из них — **вынесение общего множителя за скобки**. Это преобразование вам уже знакомо. Выполняется оно, как и умножение многочлена на одночлен, на основе распределительного свойства. Однако в случае вынесения за скобки это свойство применяется справа налево:

$$ab + ac = a(b + c).$$

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$10xy^2 - 6xy.$$

Каждый член этого многочлена можно представить в виде произведения, в котором один из множителей равен $2xy$. Этот общий множитель вынесем за скобки:

$$10xy^2 - 6xy = \underbrace{2xy \cdot 5y - 2xy \cdot 3}_{\text{общий множитель}} = 2xy(5y - 3).$$

общий множитель

Разложив многочлен на множители, полезно убедиться, что преобразование выполнено верно. Для этого достаточно выполнить обратное преобразование: например, в данном случае мысленно умножить $2xy$ на $5y - 3$.

Заметим, что для разложения многочлена $10xy^2 - 6xy$ на множители можно было бы вынести за скобки и множитель $-2xy$:

$$\begin{aligned} 10xy^2 - 6xy &= \underbrace{(-2xy)}_{\text{общий множитель}} \cdot (-5y) - \underbrace{(-2xy)}_{\text{общий множитель}} \cdot (-3) = \\ &= -2xy(-5y + 3) = -2xy(3 - 5y). \end{aligned}$$

Члены этого многочлена имеют и другие общие множители: x , $-x$, y , $-y$, xy и т. д. Но обычно за скобки выносят либо $2xy$, либо $-2xy$. Тогда в скобках остаётся многочлен, члены которого не содержат общих буквенных множителей, а их коэффициенты не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1.

- 2 Вынесение общего множителя за скобки приходится выполнять при решении разных задач.

Пример 2. Сократим дробь $\frac{ab-bc}{a^2-ac}$.

Разложим числитель и знаменатель данной дроби на множители:

$$\frac{ab-bc}{a^2-ac} = \frac{b(a-c)}{a(a-c)}.$$

Теперь ясно, что дробь можно сократить на разность $a - c$:

$$\frac{b(a-c)}{a(a-c)} = \frac{b}{a}.$$

Пример 3. Докажем, что сумма любого натурального числа и его квадрата делится на 2.

Обозначим натуральное число буквой n . Тогда сумма этого числа и его квадрата будет $n^2 + n$. Разложим $n^2 + n$ на множители:

$$n^2 + n = n \cdot n + n \cdot 1 = n(n + 1).$$

Мы представили сумму $n^2 + n$ в виде произведения $n(n + 1)$. Но n и $n + 1$ — это два последовательных натуральных числа и одно из них обязательно является чётным, т. е. делится на 2. Значит, и всё произведение $n(n + 1)$, а вместе с ним и равная ему сумма $n^2 + n$ делится на 2.

- Запишите distributive свойство умножения в том виде, как оно применяется для вынесения общего множителя за скобки.
- Покажите на примере выражения $8bc + 10ac$, как вынести общий множитель за скобки (фрагмент 1).
- Объясните, как сократить дробь $\frac{ax+ay}{bx+by}$ (в качестве образца воспользуйтесь примером 2 из текста, фрагмент 2).

А

811 Вынесите общий множитель за скобки и вычислите значение выражения:

- а) $5 \cdot 47 + 5 \cdot 13$; г) $1\frac{3}{5} \cdot 7 + 2\frac{2}{5} \cdot 7$;
 б) $127 \cdot 9 - 27 \cdot 9$; д) $0,8 \cdot 4,5 - 0,8 \cdot 2,5$;
 в) $75^2 + 25 \cdot 75$; е) $0,3 \cdot \frac{5}{6} + 0,7 \cdot \frac{5}{6}$.

Вынесите общий множитель за скобки (812—813).

- 812** а) $2a + 2c$; в) $8 + 8a$; д) $ab - bc$; ж) $cd + d$;
 б) $3x - 9y$; г) $16z - 20y$; е) $4a + ab$; з) $x - 2xy$.
813 а) $abc - abd$; в) $xyz + yzd$; д) $4ab - 2ac - 6ad$;
 б) $4cx - acx$; г) $ad + bd + cd$; е) $abx - acx - adx$.

814 Найдите значение выражения $ax - ay + az$:

- а) при $a = 58$, $x = 96$, $y = 12$, $z = 16$;
 б) при $a = 3,7$, $x = 2,8$, $y = 4,8$, $z = 2$.

Вынесите общий множитель за скобки (815—816).

- 815** а) $x - xy$; в) $6ab + 2a$; д) $xyz + yz$;
 б) $cd + d$; г) $2x - 2xz$; е) $ac - 5acd$.

Образец. $a + 3ab = a \cdot 1 + 3ab = a(1 + 3b)$.

- 816** а) $x^2 + x^6$; д) $ab + a^2$; и) $p^2x + px^2$;
 б) $5z^4 + 15z^8$; е) $y^3 - 4y^2$; к) $2ac - 4bc$;
 в) $6y^4 - 9y^2$; ж) $ab^2 - a^2b$; л) $3x^2 + 3x^3y$;
 г) $x^2 - 2xy$; з) $x^2y^2 - 2xy$; м) $6a^2b + 3ab^2$.

817 Найдите значение выражения:

- а) $x^2 + 2x$ при $x = 98$; при $x = -202$;
 б) $10a^2 - a^3$ при $a = 11$; при $a = 9$.

818 Представьте выражение в виде произведения двумя способами по следующему образцу:

$$ab - ac = a(b - c), \quad ab - ac = -a(-b + c) = -a(c - b):$$

- а) $xy - xz$; в) $3a - 3b$; д) $2dc - 10d$;
 б) $mn - nk$; г) $5xy - 5xz$; е) $6ab - 3a$.

819 Вынесите за скобки множитель $-3a$:

- а) $-3a^2 + 3ab$; в) $-3ax + 6ay$; д) $-9ax - 3a^4y$;
 б) $-3a - 3a^2c$; г) $3a - 3ab$; е) $3a^5 - 3a$.

Подсказка. Каждый член двучлена представьте в виде произведения, в котором есть множитель $-3a$.

Разложите на множители (820—821).

- 820 а) $nm^2 + mn + n^2$; г) $3x^3 - 2x^2 - x$;
 б) $-m^3 - m^2n - mn^2$; д) $3n^6 + 6n^5 - 12n^4$;
 в) $ax^2 + a^2x - ax$; е) $-6m^4 - 4m^5 - 2m^6$.
- 821 а) $10xy^2 - 35x^3y^3$; в) $24m^2n^5 - 16m^2n^3$;
 б) $9a^6b^3 + 12a^3b^4$; г) $7b^3c^3 + 14b^4c^2$.

Сократите дробь (822—823).

- 822 а) $\frac{6a+6b}{9a}$; в) $\frac{ab-ad}{abd}$; д) $\frac{ax-ay}{ax+ay}$; ж) $\frac{axy+ax}{ax+axz}$;
 б) $\frac{8y}{4x-4y}$; г) $\frac{xyz}{xz-yz}$; е) $\frac{3cd+3d}{6cd-3d}$; з) $\frac{ad+acd}{abd-acd}$.
- 823 а) $\frac{ay-az}{by-bz}$; в) $\frac{a^2-ab}{ab-b^2}$; д) $\frac{2c-8cx}{3a-12ax}$; ж) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$;
 б) $\frac{3+6c}{2+4c}$; г) $\frac{ax+2x}{ay+2y}$; е) $\frac{an+n^2}{an+a^2}$; з) $\frac{a^2-2ab+b^2}{3a-3b}$.

824 ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ Вычислите:

- а) $\frac{2^{12}-2^9}{7 \cdot 2^8}$; б) $\frac{2 \cdot 5^{10}-5^{11}}{6 \cdot 5^{11}}$; в) $\frac{3^{12}+3^{10}}{3^8}$; г) $\frac{5^8+5^6}{2 \cdot 5^7}$.

Б

825 Вынесите общий множитель за скобки:

- а) $2a^2b^2 - 6ab^2 + 2a^2b$; в) $12xy^2z^2 - 8x^2yz^2 - 2x^2y^2z$;
 б) $3a^3t + 9a^2t - 6at^2$; г) $-4a^4b^2c - 8a^4b^3c - 16a^3b^2c$.

826 Вычислите, применяя вынесение общего множителя за скобки:

- а) $21 \cdot 12 + 21 \cdot 14 + 26 \cdot 79$; б) $4,3 \cdot 2,8 - 3,8 \cdot 1,2 - 2,8 \cdot 3,1$.

ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (827—828)

827 Найдите значение выражения:

- а) $\frac{5 \cdot 4^{27} - 21 \cdot 4^{26}}{2^{50}}$; б) $\frac{3^{51} - 4 \cdot 3^{50}}{9^{26}}$.

828 Докажите, что значение выражения:

- а) $6^5 + 6^4$ делится на 7; в) $3^4 + 3^5 + 3^6$ делится на 13;
 б) $9^4 - 9^3$ делится на 8; г) $2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$ делится на 5.

Разложите на множители (829—831).

- 829** а) $(x+1) + x(x+1)$; в) $y(a-y) - y^2(a-y)$;
 б) $m^2(n+1) + 2m(n+1)$; г) $a(a-1) - (a-1)$.
830 а) $x(y-z) + 3(z-y)$; г) $x(x-4) - 5(4-x)$;
 б) $a(b-c) - b(c-b)$; д) $b(b-1) + (1-b)$;
 в) $m(n-1) + k(1-n)$; е) $2(p-2) + p(2-p)$.

Образец. Разложим выражение $a(x-y) - b(y-x)$ на множители. Так как $y-x = -(x-y)$, то $a(x-y) - b(y-x) = a(x-y) + b(x-y) = (x-y)(a+b)$.

- 831** а) $2(x-y) + (x-y)^2$; г) $(x-y) + x(y-x)$;
 б) $(a+b)^2 - (a+b)(a-b)$; д) $n(m-n)^2 - (n-m)^3$;
 в) $x(x-y)^2 - y(y-x)^2$; е) $a(a-c)^2 - c(a-c)(c-a)$.
832 Преобразуйте в многочлен, применяя вынесение общего множителя за скобки:
 а) $(b-1)(b+2) - (b-2)(b+2) + (b-3)(b+2) - (b-4)(b+2)$;
 б) $(x+y)(x+1) - (x+y)(1-y) - (x+y)(x-y)$.

- 833** Известно, что $m - n = \frac{3}{4}$. Чему равно значение выражения:

а) $\frac{n}{mn-n^2}$; б) $\frac{m}{mn-m^2}$; в) $\frac{n^2-2mn+m^2}{3m-3n}$?

- 834** ■ **РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ** ■ Чтобы использовать калькулятор для вычисления значения многочлена

$$4,5x^3 - 7x^2 + 2x - 2,5,$$

этот многочлен удобно представить в таком виде:

$$4,5x^3 - 7x^2 + 2x - 2,5 = (4,5x^2 - 7x + 2)x - 2,5 = ((4,5x - 7)x + 2)x - 2,5.$$

Выполните вычисления для $x = 1,2$.

Используя рассмотренный способ, найдите значение выражения:

- а) $6,5x^3 - 5x^2 + 4x - 7$ при $x = 0,8$;
 б) $0,5x^4 - 3x^3 + 5,2x - 2$ при $x = 5$.

- 835** ■ **ДОКАЗЫВАЕМ** ■ Проиллюстрируйте каждое из данных утверждений конкретным примером и докажите его:
 а) разность между квадратом любого натурального числа и этим числом является чётным числом;
 б) сумма двух последовательных степеней числа 2 делится на 6;
 в) сумма двух последовательных степеней любого натурального числа делится на следующее за ним число.

8.2 Способ группировки

Попробуем разложить на множители многочлен

$$ax - bx + ay - by.$$

Его члены не имеют общего множителя. Однако их можно сгруппировать таким образом, что слагаемые в каждой группе будут иметь общий множитель и его можно будет вынести за скобки:

$$ax - bx + ay - by = (ax - bx) + (ay - by) = x(a - b) + y(a - b).$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$x(a - b) + y(a - b) = (a - b)(x + y).$$

Таким образом,

$$ax - bx + ay - by = (a - b)(x + y).$$

Способ, который мы применили для разложения на множители, так и называется — **способ группировки**.

Заметим, что совсем необязательно группировать те слагаемые, которые расположены рядом. Так, для многочлена

$$ax - bx + ay - by$$

к нужному результату приведёт и группировка первого слагаемого с третьим, а второго — с четвёртым:

$$ax - bx + ay - by = a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b).$$

Пример. Воспользуемся способом группировки для разложения на множители многочлена

$$2a - 2b + 2c - 3ab + 3b^2 - 3bc.$$

Этот многочлен можно представить или в виде суммы трёх двучленов, или в виде суммы двух трёхчленов. В первом случае преобразования будут такими:

$$\begin{aligned} 2a - 2b + 2c - 3ab + 3b^2 - 3bc &= \\ &= (2a - 3ab) - (2b - 3b^2) + (2c - 3bc) = \\ &= a(2 - 3b) - b(2 - 3b) + c(2 - 3b) = \\ &= (2 - 3b)(a - b + c). \end{aligned}$$

Во втором случае получим

$$\begin{aligned} 2a - 2b + 2c - 3ab + 3b^2 - 3bc &= \\ &= (2a - 2b + 2c) - (3ab - 3b^2 + 3bc) = \\ &= 2(a - b + c) - 3b(a - b + c) = \\ &= (a - b + c)(2 - 3b). \end{aligned}$$

- Прокомментируйте каждый шаг разложения многочлена на множители:

$$2a + 2b + ca + cb = (2a + 2b) + (ca + cb) = 2(a + b) + c(a + b) = (a + b)(2 + c).$$

Как называют применённый здесь способ разложения на множители?

- Сгруппируйте члены многочлена $2a + 2b + ca + cb$ иначе, чем это сделано в первом случае, и выполните разложение на множители.

А

836 Представьте выражение в виде произведения:

- а) $2x(x - y) + 3y(x - y)$; в) $m(m - n) - (m - n)$;
 б) $a(a + b) - 5b(a + b)$; г) $3a(a + z) + (a + z)$.

837 Разложите на множители:

- а) $3a + 3b + c(a + b)$; г) $a(x - y) + bx - by$;
 б) $2(m + n) + km + kn$; д) $3b - 3c + a(b - c)$;
 в) $by + 4(x + y) + bx$; е) $ab + 2(b - d) - ad$.

838 Разложите многочлен на множители, группируя одночлены разными способами:

- а) $xy + xz + 6y + 6z$; в) $cb + 3a + 3b + ac$;
 б) $4a + 4b + bx + ax$; г) $cd + 2b + bd + 2c$.

839 Заключите два последних слагаемых в скобки, поставив перед ними знак «-», и затем выполните разложение на множители:

- а) $x(y + z) - 2y - 2z$; д) $x(y - z) - y + z$;
 б) $a(b + c) - b - c$; е) $2b(x - y) + y - x$;
 в) $a(b - c) - 4b + 4c$; ж) $5(c - b) + ab - ac$;
 г) $a(a - b) - ac + bc$; з) $2(x - c) - bx + bc$.

840 Разложите на множители:

- а) $ab + ac - b - c$; д) $ab - ac + 5b - 5c$;
 б) $mn - m + n - 1$; е) $xy - xz - y + z$;
 в) $bd - ad + 3a - 3b$; ж) $km - k - 2m + 2$;
 г) $2b - 2c + ab - ac$; з) $3x - 3y - 2ax + 2ay$.

Б

841 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Назовите вместо многоточия такое слагаемое, чтобы многочлен можно было разложить на множители:

- а) $ax + bx + ca \dots$; в) $m^2n - m - mn \dots$;
 б) $n^3 - 2n^2 + n \dots$; г) $mc + c - mb \dots$.

842 Разложите на множители многочлен:

- а) $a^2 + ad - a - d$; д) $b^2c^2 + c^3 - b^3 - bc$;
 б) $y^3 - xy^2 + y - x$; е) $a^3 - 3a^2 + a - 3$;
 в) $3ab - b^2 + 3a^2 - ab$; ж) $8x^3 + 2x^2 + 4x + 1$;
 г) $6y^2 - 3y + 2ay - a$; з) $5a^3c - a^3 + 5bc - b$.

843 Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

- а) $m^2 - m - mn + n$ при $m = 17,2$, $n = 7,2$;
 б) $2xy - 3x + 3y - 2y^2$ при $x = 11,5$, $y = 6,5$;
 в) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$ при $x = y = -19,5$;
 г) $m^3 + m^2n - mn - n^2$ при $m = 11,2$, $n = -11,2$.

Разложите на множители (844—845).

- 844** а) $ax - a + bx - b + cx - c$;
 б) $ax + bx - ay - by + az + bz$;
 в) $ax - bx - x + ay - by - y$;
 г) $2a^2 - a + 2ab - b - 2ac + c$;
 д) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$;
 е) $px^2 + qx + q^2y + pqxy + p^2qx + pq^2$.

Подсказка. Можно группировать как по два, так и по три слагаемых.

- 845** а) $xy(x - y) - xz(y - z) - xz(x - y) + yz(y - z)$;
 б) $(a - x)(x - y)(y + x + a) - (y - x)(x - a)(y - x - a)$.
- 846** Разложите на множители трёхчлен:
 а) $a^2 + 5ab + 4b^2$; в) $b^2 + 5b + 6$;
 б) $c^2 - 4cb + 3b^2$; г) $c^2 - 7c + 12$.

Образец. Разложим на множители многочлен

$$2x^2 + 5xy + 2y^2.$$

Чтобы применить группировку, разобьём слагаемое $5xy$ на два одночлена: xy и $4xy$. Получим

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5xy + 2y^2 &= 2x^2 + xy + 4xy + 2y^2 = \\ &= x(2x + y) + 2y(2x + y) = (2x + y)(x + 2y). \end{aligned}$$

8.3 Формула разности квадратов

1 Двучлен $a^2 - b^2$ представляет собой разность квадратов. Оказывается, это выражение можно разложить на множители. При этом получится красивая и легко запоминающаяся формула.

Чтобы воспользоваться способом группировки, прибавим к двучлену $a^2 - b^2$ выражение ab и вычтем его:

$$a^2 - b^2 = a^2 - b^2 + ab - ab = a(a + b) - b(a + b) = (a - b)(a + b).$$

Мы получили формулу разности квадратов:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Разность квадратов двух чисел равна произведению разности этих чисел и их суммы.

Приведём примеры применения формулы разности квадратов.

Пример 1. Разложим на множители двучлен $9 - 4x^2$.

Данное выражение можно представить в виде разности квадратов двух выражений: $9 - 4x^2 = 3^2 - (2x)^2$.

Теперь воспользуемся формулой:

$$\begin{array}{ccccccc} 3^2 - (2x)^2 & = & (3 - 2x)(3 + 2x). \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a^2 - b^2 & = & (a - b)(a + b). \end{array}$$

Таким образом,

$$9 - 4x^2 = (3 - 2x)(3 + 2x).$$

Пример 2. Докажем, что разность $76^2 - 14^2$ делится на 6.

Разложим разность $76^2 - 14^2$ на множители:

$$\begin{aligned} 76^2 - 14^2 &= (76 - 14)(76 + 14) = 62 \cdot 90 = \\ &= 2 \cdot 31 \cdot 3 \cdot 30 = 6 \cdot 31 \cdot 30. \end{aligned}$$

Так как произведение $6 \cdot 31 \cdot 30$ делится на 6, то и разность $76^2 - 14^2$ делится на 6.

- 2 Формула разности квадратов фактически является ещё одной формулой сокращённого умножения. Только с этой целью применять её надо справа налево:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Произведение разности двух чисел и их суммы равно разности квадратов этих чисел.

С помощью этой формулы можно преобразовать произведение разности и суммы любых двух выражений.

Пример 3. Умножим разность $5x - 2y$ на сумму $5x + 2y$:

$$\begin{array}{ccccccc} (5x - 2y)(5x + 2y) & = & (5x)^2 - (2y)^2 & = & 25x^2 - 4y^2. \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (a - b)(a + b) & = & a^2 - b^2 \end{array}$$

Пример 4. Упростим выражение $6c^2 - (2c - b)(b + 2c)$:

$$\begin{aligned} 6c^2 - (2c - b)(2c + b) &= 6c^2 - (4c^2 - b^2) = \\ &= 6c^2 - 4c^2 + b^2 = 2c^2 + b^2. \end{aligned}$$

Мы заменили сумму $b + 2c$ равным выражением $2c + b$, переставив слагаемые, а затем воспользовались формулой разности квадратов.

- Запишите формулу разности квадратов и прочитайте её (фрагмент 1). Можно ли применить формулу разности квадратов к выражению $4x^2 + y^2$? $a^2 - 25b^2$? $100a - c^2$?
- Объясните, как разложить на множители выражение $16 - 9c^2$.
- Воспользовавшись примером 2 как образцом, докажите, что разность $59^2 - 41^2$ делится на 200.
- Запишите формулу разности квадратов справа налево и прочитайте её (фрагмент 2). Примените записанную вами формулу сокращённого умножения для преобразования произведения $(2m - 3n)(2m + 3n)$; $(5a + 1)(5a - 1)$.

A

847 Какие из выражений можно разложить на множители, применив формулу разности квадратов:

- а) $a^2 - 9$; г) $49 - p^2$; ж) $6a^2 - b^2$;
 б) $b^2 + 1$; д) $25 + x^2$; з) $16x - y^2$;
 в) $4 - y^2$; е) $1 - c^2$; и) $x^2y^2 - 4$?

Разложите на множители (848—851).

848 а) $x^2 - y^2$; в) $a^2 - 9$; д) $x^2 - 1$; ж) $a^2 - 0,01$;

б) $y^2 - x^2$; г) $16 - b^2$; е) $1 - a^2$; з) $\frac{4}{9} - x^2$.

849 а) $9x^2 - 4$; в) $16 - 49y^2$; д) $16m^2 - 9n^2$; ж) $4x^2 - 1$;

б) $4a^2 - 25$; г) $9a^2 - 4b^2$; е) $25x^2 - y^2$; з) $1 - 36a^2$.

850 а) $0,25a^2 - 1$; в) $0,09x^2 - y^2$; д) $1,44a^2 - 1,21$;

б) $0,16 - 4b^2$; г) $100y^2 - 0,01x^2$; е) $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2$.

851 а) $x^2y^2 - z^2$; в) $9 - m^2n^2$; д) $y^4 - x^2$; ж) $x^{10} - 25$;

б) $a^2b^2 - 16$; г) $b^2c^2 - 1$; е) $y^6 - 9$; з) $9 - b^4$.

852 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Вычислите:

а) $37^2 - 13^2$; б) $72^2 - 28^2$; в) $42,4^2 - 42,3^2$; г) $6,8^2 - 3,2^2$.

853 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■ а) Делится ли значение выражения $35^2 - 11^2$ на 2? на 3? на 4? на 5? на 6? на 12? на 22? на 23? на 24?

б) Укажите 10 делителей числа, равного $97^2 - 43^2$.

854 Сократите дробь:

а) $\frac{a+b}{a^2-b^2}$; в) $\frac{a^2-1}{ab-b}$; д) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$;

б) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$; г) $\frac{ab-3a}{b^2-9}$; е) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$.

Выполните умножение (855—857).

855 а) $(y-3)(y+3)$; г) $(x+y)(x-y)$;

б) $(1-x)(1+x)$; д) $(x-2)(2+x)$;

в) $(m-n)(m+n)$; е) $(c+a)(a-c)$.

856 а) $(1+3m)(1-3m)$; г) $(a-3b)(3b+a)$;

б) $(2x-1)(2x+1)$; д) $(4x+3y)(3y-4x)$;

в) $(2x-y)(2x+y)$; е) $(5b-10c)(5b+10c)$.

857 а) $(x^2+2)(x^2-2)$; г) $(x^3+5)(x^3-5)$;

б) $(y-a^2)(y+a^2)$; д) $(ab-c)(ab+c)$;

в) $(a^2-4)(a^2+4)$; е) $(1-xy)(xy+1)$.

858 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Вычислите, используя формулу

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2:$$

- а) $19 \cdot 21$; б) $99 \cdot 101$; в) $28 \cdot 32$; г) $4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{2}$.

Образец.

$$49 \cdot 51 = (50 - 1)(50 + 1) = 50^2 - 1 = 2500 - 1 = 2499.$$

Представьте выражение в виде многочлена (**859—861**).

859 а) $2y^2 + (y - 2)(y + 2)$; в) $(2b - c)(2b + c) - 2c^2$;

б) $15 - (a + 3)(a - 3)$; г) $(1 - 3k)(1 + 3k) - k^2$.

860 а) $(a - 1)(a + 1) + a(a - 2)$;

б) $(2x - y)(y + 2x) + x(4 - 3x)$;

в) $5c(c + 1) - (b - 3c)(b + 3c)$;

г) $(y - 2)(y + 2) + (3 - y)(3 + y)$;

д) $(a + b)(a - b) - (a - b)^2$;

е) $(2a + 1)^2 + (1 - 2a)(1 + 2a)$.

861 а) $a(a + 1)(a - 1)$; в) $2b(c - b)(c + b)$;

б) $-2(x - 2)(x + 2)$; г) $3a(1 + b)(b - 1)$.

Б**862** ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Вычислите:

а) $\frac{1 - 0,8^2}{0,6}$; в) $\frac{6,4}{4^2 - 0,8^2}$; д) $\frac{1,7^2 - 1,3^2}{2,8^2 - 2,2^2}$;

б) $\frac{1,4^2 - 0,5^2}{0,3^2}$; г) $\frac{0,3^2}{0,4^2 - 0,2^2}$; е) $\frac{1,2^2 - 0,3^2}{0,8^2 - 0,7^2}$.

863 Представьте в виде произведения:

а) $(k + m)^2 - n^2$;

г) $(x + y)^2 - (x - y)^2$;

б) $(p - n)^2 - 1$;

д) $(x - 1)^2 - (x + 1)^2$;

в) $(x - y)^2 - 1$;

е) $(a - 2b)^2 - (2a - b)^2$.

864 Разложите на множители:

а) $(a + b) + (a^2 - b^2)$;

г) $(2 - x) - (4 - x^2)$;

б) $(x - y) + (x^2 - y^2)$;

д) $(y - 1)^2 - (y^2 - 1)$;

в) $(b + c) - (b^2 - c^2)$;

е) $(a^2 - 4) + (a - 2)^2$.

ДОКАЗЫВАЕМ (865—866)**865** Докажите, что:

- а) разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна сумме этих чисел;

б) разность квадратов двух последовательных чётных чисел равна удвоенной сумме этих чисел. Проиллюстрируйте доказанные утверждения конкретными примерами.

- 866** Возьмите любые три последовательных натуральных числа и убедитесь в том, что произведение крайних из них равно квадрату среднего, уменьшенному на единицу. Докажите это утверждение. (Обозначьте среднее число буквой n .)

Представьте в виде многочлена (867—868).

- 867** а) $(a + 3)(a - 3) + (a + 2)(a - 2) - a(2a + 1) + 4$;
 б) $(x + 1)(x - 1) + (x + 5)(x - 5) - 2x(x + 3) + 6$;
 в) $(1 - 2x)(1 + 2x) - (2 - x)(2 + x) + 5(x^2 - 1) - 3$.
- 868** а) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$; в) $(1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$;
 б) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$; г) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)$.

Используйте формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ для преобразования произведения в многочлен (869—870).

- 869** а) $(ax + ay)(x - y)$; в) $(b - c)(2ac + 2ab)$;
 б) $(x + y)(x^2 - xy)$; г) $(2 + x)(6y - 3xy)$.
- 870** а) $(a + b - c)(a + b + c)$; в) $(a^2 + 2a - 1)(a^2 - 2a + 1)$;
 б) $(x + y - z)(x - y + z)$; г) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

8.4 Формулы разности и суммы кубов

- 1** Формулой разности кубов называют равенство

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Подобрать соответствующую группировку для его доказательства достаточно трудно. Поэтому убедимся в справедливости этого равенства, перемножив многочлены в правой части:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{ab^2} - \underline{a^2b} - \underline{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3.$$

Читается эта формула так:

разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел и неполного квадрата их суммы.

В этой формулировке выражение $a^2 + ab + b^2$ названо *неполным квадратом*. Такое название принято из-за его внешнего сходства с выражением $a^2 + 2ab + b^2$, равным квадрату суммы $a + b$.

- 2** Приведём пример применения этой формулы для разложения многочлена на множители.

Пример. Разложим на множители выражение $1 - 8x^3$.

Двучлен $1 - 8x^3$ можно представить в виде разности кубов:

$$1 - 8x^3 = 1^3 - (2x)^3.$$

Теперь применим формулу:

$$1^3 - (2x)^3 = (1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2).$$

Формула суммы кубов выглядит так:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Читается эта формула так:

сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел и неполного квадрата их разности.

Докажите эту формулу самостоятельно.

- Запишите формулы разности кубов и суммы кубов; прочитайте эти формулы. Среди приведённых выражений выберите те, к которым можно применить формулу разности кубов или суммы кубов: $1 - a^3$; $x^3 + y^3$; $b^3 + 8c^3$.
- Примените нужную формулу для разложения на множители выражения: $8 - c^3$; $x^3 + 1$; $27a^3 - b^3$.

A

871 Выполните умножение по правилу умножения многочленов:

а) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$; б) $(a - c)(a^2 + ac + c^2)$.

872 Выполните умножение, используя формулу суммы кубов или разности кубов:

а) $(m - 1)(m^2 + m + 1)$; в) $(2a + 2b)(4a^2 - 4ab + 4b^2)$;

б) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$; г) $(2 - y^2)(4 + 2y^2 + y^4)$.

Разложите на множители (873—874).

873 а) $x^3 + y^3$; в) $m^3 + 27$; д) $y^3 + \frac{1}{8}$;

б) $x^3 + 1$; г) $8 + c^3$; е) $\frac{8}{27} + z^3$.

874 а) $p^3 - q^3$; в) $1 - x^3$; д) $b^3 - \frac{1}{125}$;

б) $a^3 - 8$; г) $-x^3 + y^3$; е) $\frac{1}{27} - t^3$.

875 Примените для разложения на множители, если это возможно, формулу суммы или разности кубов:

а) $8x^3 + y^3$; в) $1 - 27a^3$; д) $x^6 - \frac{1}{8}z^2$;

б) $9a^3 + b^3$; г) $8m^3 - 64n^3$; е) $\frac{1}{8}t^3 + 8s^3$.

- 876 ■ РАССУЖДАЕМ ■** Составьте выражения, которые можно разложить на множители с помощью формул суммы кубов или разности кубов, и выполните эти преобразования.

Б

- 877** Упростите выражение:

- а) $(a-b)(a^2+ab+b^2) + (a+b)(a^2-ab+b^2)$;
 б) $(x+2)(x^2-2x+4) - (x-2)(x^2+2x+4)$;
 в) $y(y-1)(y+1) - (y-3)(y^2+3y+9)$;
 г) $x(x+3)^2 - (x+2)(x^2-2x+4) - 2(x-2)(3x+2)$.

Разложите на множители (878—879).

- 878** а) $x^3y^3 - 1$; в) $1 - m^3n^3p^3$;
 б) $8a^3b^3 + c^3$; г) $x^3y^3 + 8a^3z^3$.
879 а) $(x+y)^3 - (x-y)^3$; в) $(n+3)^3 - (n-3)^3$;
 б) $(a-b)^3 + (a+b)^3$; г) $(m-1)^3 + (m+1)^3$.

- 880** Сократите дробь:

- а) $\frac{a-b}{a^3-b^3}$; в) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$; д) $\frac{m^3+n^3}{2(m^2-mn+n^2)}$;
 б) $\frac{p^3+q^3}{2p+2q}$; г) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^3+b^3}$; е) $\frac{a^2-az}{a^3-z^3}$.

- 881 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■** Докажите, что:

- а) $\frac{a^3+b^3}{a+b} + ab = a^2 + b^2$; б) $\frac{a^3-b^3}{a-b} + ab = (a+b)^2$.

- 882** Выполните умножение:

- а) $(m+1)((m^2-m+1)+3)$; в) $(a+b)(a^2-3ab+b^2)$;
 б) $(x+1)(x^2-x+7)$; г) $(p-q)(p^2+3pq+q^2)$.

Подсказка. Преобразуйте второй многочлен так, чтобы можно было применить формулу разности или суммы кубов. Например, так:

$$(c-1)(c^2+c+3) = (c-1)((c^2+c+1)+2) = (c^3-1) + 2(c-1) = c^3-1+2c-2 = c^3+2c-3.$$

- 883** Представьте выражение в виде многочлена:

- а) $(a-b)(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)$;
 б) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^8+x^4+1)$;
 в) $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$;
 г) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2$.

8.5 Разложение на множители с применением нескольких способов

1 Мы рассмотрели разные приёмы, с помощью которых многочлен можно разложить на множители: вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, применение формул сокращённого умножения. В более сложных случаях для достижения цели приходится последовательно применять несколько приёмов. Никаких общих правил, помогающих установить, какие способы и в каком порядке следует применять, не существует. Всё зависит от вашего опыта и наблюдательности. Более того, разложение многочлена на множители не всегда возможно. Однако некоторых рекомендаций всё же следует придерживаться. Приведём их:

- Если можно вынести за скобки общий множитель, сделайте это.
- Посмотрите, нельзя ли воспользоваться какой-нибудь формулой:
 - если имеется двучлен, то проверьте, нельзя ли применить формулу разности квадратов или же формулу разности (суммы) кубов;
 - если имеется трёхчлен, то проверьте, нельзя ли свернуть его в квадрат двучлена.
- Если не удаётся применить формулы сокращённого умножения, то попытайтесь воспользоваться способом группировки.
- Когда вы закончили разложение на множители, полезно проверить с помощью умножения, получен ли вами верный результат.

Пример 1. Разложим на множители многочлен $3a^2b - 12b$.

Начнём преобразование с вынесения за скобки общего множителя $3b$:

$$3a^2b - 12b = 3b(a^2 - 4).$$

Многочлен, оставшийся в скобках, можно разложить на множители с применением формулы разности квадратов:

$$3b(a^2 - 4) = 3b(a - 2)(a + 2).$$

Таким образом,

$$3a^2b - 12b = 3b(a - 2)(a + 2).$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$25 - a^2 + 2ab - b^2.$$

В этой сумме естественно сгруппировать последние три слагаемых:

$$25 - a^2 + 2ab - b^2 = 25 - (a^2 - 2ab + b^2) = 25 - (a - b)^2.$$

Теперь можно воспользоваться формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} 25 - (a - b)^2 &= 5^2 - (a - b)^2 = \\ &= (5 - (a - b))(5 + (a - b)) = (5 - a + b)(5 + a - b). \end{aligned}$$

Итак,

$$25 - a^2 + 2ab - b^2 = (5 - a + b)(5 + a - b).$$

Пример 3. Разложим на множители многочлен

$$ax + ay + x^2 + 2xy + y^2.$$

Этот многочлен состоит из пяти членов. Сгруппировав два первых и три последних члена, получим

$$ax + ay + x^2 + 2xy + y^2 = a(x + y) + (x + y)^2 = \\ = (x + y)(a + x + y).$$

2 **Пример 4.** Разложим на множители многочлен $a^6 - b^6$.

Представим выражение $a^6 - b^6$ в виде разности квадратов и воспользуемся соответствующей формулой:

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3).$$

Теперь применим формулы разности и суммы кубов:

$$(a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Окончательно имеем $a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

Разложение на множители можно выполнить иначе, представив исходное выражение в виде разности кубов:

$$a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) = \\ = (a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4).$$

Сравнивая результаты, нетрудно понять, что преобразование можно продолжать, разложив на множители многочлен $a^4 + a^2b^2 + b^4$.

Прибавим и вычтем одно и то же выражение a^2b^2 :

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = \\ = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2).$$

Таким образом, мы пришли к уже известному результату:

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2).$$

□ Назовите известные вам приёмы разложения многочленов на множители. Прочитайте рекомендации, которых целесообразно придерживаться при разложении многочлена на множители. Пользуясь этими рекомендациями, разложите на множители многочлен $4a^2c - b^2c$.

□ Как проверить, верно или неверно выполнено разложение многочлена на множители? Проверьте правильность разложения на множители многочленов:

а) $x^3 - x^2y - x + y = (x - 1)(x + 1)(x - y)$;

б) $a^2 - 2ab + b^2 + a - b = (a - b)(a - b + 1)$.

A

Разложите на множители (884—887).

884 а) $3a^2 - 3b^2$;

д) $5x^2 - 5$;

и) $x^3 - 9x$;

б) $12m^2 - 12n^2$;

е) $2a^2 - 8$;

к) $3y^3 - 3y$;

в) $ax^2 - ay^2$;

ж) $3an^2 - 27a$;

л) $2a^3 - 8a$;

г) $2a^2x - 2b^2x$;

з) $2xy^2 - 50x$;

м) $40b - 10b^3$.

- 885 а) $3a^2 - 6a + 3$; г) $-2a^2 - 4ab - 2b^2$;
 б) $ay^2 - 2ay + a$; д) $nx^2 + 4nx + 4n$;
 в) $8x^2 + 16xy + 8y^2$; е) $4x^2y - 4xy + y$.
- 886 а) $2x^3 + 2y^3$; в) $am^3 - an^3$; д) $5 + 5b^3$;
 б) $-3a^3 - 3b^3$; г) $2m^3 - 16$; е) $-c^4 + 27c$.
- 887 а) $a^4 - b^4$; в) $n^4 - 16$; д) $1 - c^4$;
 б) $x^4 - x^2$; г) $a^4 - 9a^2$; е) $x^2 - 16x^4$.

Б

Разложите на множители (888—895).

- 888 а) $x^8 - y^8$; в) $x^4 - x^8$; д) $x^6 - 2^6$;
 б) $a^8 - b^4$; г) $a^9 - 1$; е) $a^6 - 1$.
- 889 а) $x^2y + 2xy^2 + y^3$; в) $-9ay^2 - 6ay - a$;
 б) $a^3x - 4a^2x + 4ax$; г) $6bc^2 - 3b^2c - 3c^3$.
- 890 а) $b^2 - c^2 - b + c$; в) $a^2 - a - c^2 + c$;
 б) $a + b - a^2 + b^2$; г) $m - m^2 - n + n^2$.
- 891 а) $a^3 + a^2 - a - 1$; в) $ab^2 + cd^2 - ad^2 - b^2c$;
 б) $b^2 - bc - a^2 + ac$; г) $x^2y^2 + 1 - y^2 - x^2$.
- 892 а) $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2$; в) $n^4 + an^3 - n - a$;
 б) $xy^2 + x^2y - x^3 - y^3$; г) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
- 893 а) $ax + ay - x^2 - 2xy - y^2$; г) $9a^4 + 6a^2c + c^2 - 9$;
 б) $a^2 - 2ab + b^2 - a + b$; д) $ma^2 - m^3 - 2m^2 - m$;
 в) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$; е) $4x^5 + 4x^3y + xy^2 - 4x$.
- 894 а) $x^2(x - 3) + 10x(x - 3) + 25(x - 3)$;
 б) $4c^2(c + 2) + 9(c + 2) - 12c(c + 2)$;
 в) $a^2 - 25 - 2a(a^2 - 25) + a^2(a^2 - 25)$;
 г) $6x(y^2 - 1) + 9x^2(y^2 - 1) - 1 + y^2$.
- 895 а) $(a - x)(x^2 - y^2) - (x - y)(a^2 - x^2)$;
 б) $(a - x)(x^3 - y^3) - (x - y)(a^3 - x^3)$.

- 896 ■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■ Трёхчлен $x^2 - 6x + 8$ можно разложить на множители, выделив квадрат двучлена:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 8 &= x^2 - 6x + 8 + 1 - 1 = (x^2 - 6x + 9) - 1 = \\ &= (x - 3)^2 - 1 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2). \end{aligned}$$

Разложите на множители трёхчлен:

- а) $a^2 + 4a - 5$; б) $x^2 - 2x - 24$; в) $a^2 + 8a + 15$.

897 Разложите выражение на множители двумя способами:

- 1) применив формулу разности квадратов;
 - 2) раскрыв скобки и затем применив группировку:
- а) $(1 + ab)^2 - (a + b)^2$; б) $(a + 2x)^2 - (2 + ax)^2$.

898 ■ **ДОКАЗЫВАЕМ** ■ Докажите, что разность между кубом любого натурального числа и этим числом делится на 6.

899 ■ **ИССЛЕДУЕМ** ■

1) Докажите, что:

а) $\frac{x^{16} - y^{16}}{x - y} = (x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8)$;

б) $\frac{x^{64} - y^{64}}{x - y} = (x + y)(x^2 + y^2) \dots (x^{32} + y^{32})$.

2) Что вы заметили? Можно ли сократить дробь $\frac{x^8 - y^8}{x - y}$? $\frac{x^{10} - y^{10}}{x - y}$?

3) Сократите дробь $\frac{x^{2^{10}} - y^{2^{10}}}{x - y}$.

8.6 Решение уравнений с помощью разложения на множители

Произведение двух или нескольких чисел равно нулю в том и только в том случае, когда хотя бы одно из этих чисел равно нулю.

Покажем, как это свойство произведения используется для решения уравнений.

Пример 1. Решим уравнение $(x + 3)(5x - 4) = 0$.

Равенство нулю произведения $(x + 3)(5x - 4)$ означает, что $x + 3 = 0$ или $5x - 4 = 0$.

Наше уравнение распалось на два более простых уравнения. Решим каждое из них.

$$\begin{array}{l|l} x + 3 = 0 & 5x - 4 = 0 \\ x = -3 & 5x = 4 \\ & x = 0,8 \end{array}$$

Значит, произведение $(x + 3)(5x - 4)$ обращается в нуль при $x = -3$ и при $x = 0,8$.

Таким образом, уравнение $(x + 3)(5x - 4) = 0$ имеет два корня: -3 и $0,8$.

Пример 2. Решим уравнение $4x^2 - 9 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители, а затем воспользуемся приёмом, рассмотренным в предыдущем примере:

$$(2x - 3)(2x + 3) = 0.$$

$$\begin{array}{ccc} 2x - 3 = 0 & \text{или} & 2x + 3 = 0 \\ 2x = 3 & | & 2x = -3 \\ x = 1,5 & & x = -1,5 \end{array}$$

Ответ. 1,5; -1,5.

- а) Какое свойство произведения используется для решения уравнения $(x - 1)(x + 5) = 0$ (сформулируйте это свойство)? Решите данное уравнение.
- б) Приведите свой пример уравнения, решаемого на основе равенства нулю произведения.
- Примените приём решения уравнения, рассмотренный в примере 2, для нахождения корней уравнения $x^2 - 6x = 0$.

А

900 Является ли корнем уравнения $(x + 8)(2x - 6) = 0$ число: 0; -3; 3; -5; 5; -8; 8?

901 Найдите корни уравнения:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------------|
| а) $(x + 3)(x - 5) = 0$; | д) $-2x(x - 4) = 0$; |
| б) $(z - 4)(2z + 1) = 0$; | е) $y(y + 3)(y - 6) = 0$; |
| в) $(7 - x)(3 + 4x) = 0$; | ж) $(1 - x)(3x - 2)(x + 5) = 0$; |
| г) $y(3y + 7) = 0$; | з) $z(2 - z)(3 - 2z) = 0$. |

Решите уравнение (902—905).

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| 902 а) $3x^2 + 15x = 0$; | в) $-2x^2 - 4x = 0$; |
| б) $9y - y^2 = 0$; | г) $x^3 - x^2 = 0$. |
| 903 а) $x^2 - 4 = 0$; | в) $1 - z^2 = 0$; |
| б) $4x^2 - 25 = 0$; | г) $3z^2 - 75 = 0$. |
| 904 а) $x^3 - x = 0$; | в) $5z^3 - 5z = 0$; |
| б) $4y - y^3 = 0$; | г) $z - 9z^3 = 0$. |
| 905 а) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; | в) $5y^2 + 20y + 20 = 0$; |
| б) $x^2 - 10x + 25 = 0$; | г) $2y^2 - 12y + 18 = 0$. |

Подсказка. а) Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена.

Б

906 Найдите корни уравнения подбором, а затем решите это уравнение, применив разложение на множители:

- а) $y^2 = y$; б) $a^3 = a$; в) $x^2 = 4x$; г) $t^2 = -5t$.

Найдите корни уравнения (907—908).

- 907** а) $(x^2 + 3)(x - 7) = 0$; в) $(z - 1)^2(z + 4) = 0$;
 б) $(3y - 1)(y^2 + 1) = 0$; г) $(3t + 12)(t + 2)^2 = 0$.
- 908** а) $3x(x - 1) + (x^2 - 1) = 0$; в) $3(x - 2) + (x^2 - 4) = 0$;
 б) $2(y - 1) - (1 - y)^2 = 0$; г) $(y - 3)^2 - 4(3 - y) = 0$.
- 909** Решите уравнение:
 а) $(x + 1)^2 - 4 = 0$; в) $1 - (x - 3)^2 = 0$;
 б) $(x + 2)^2 - 9 = 0$; г) $25 - (10 - x)^2 = 0$.
- 910** Найдите корни уравнения (для разложения многочлена на множители воспользуйтесь способом, рассмотренным в упражнении 896):
 а) $x^2 + 4x + 3$; в) $x^2 - 2x - 3$;
 б) $x^2 + 2x - 8$; г) $x^2 - 10x + 16$.

911 ■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■

Решим уравнение $\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\right) = 0$.

$\frac{3}{x} - \frac{1}{4} = 0$	или	$\frac{1}{x} + \frac{2}{3} = 0$
$\frac{3}{x} = \frac{1}{4}$		$\frac{1}{x} = -\frac{2}{3}$
$x = 3 \cdot 4$		$2x = -3$
$x = 12$		$x = -1,5$

Ответ. 12; -1,5.

Решите уравнение, воспользовавшись разобранным способом:

- а) $\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{x}\right) = 0$; в) $\left(\frac{5}{x} + 3\right)\left(\frac{2}{x} + 2\right) = 0$;
 б) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{x}\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{x}\right) = 0$; г) $\left(\frac{3}{2x} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3x} - \frac{2}{9}\right) = 0$.
- 912** Решите уравнение относительно x :
 а) $x^2 - m^2 = 0$; в) $(x + 4 - a)(x + 4 + a) = 0$;
 б) $a^2 - x^2 = 0$; г) $25 - (x - b)^2 = 0$.

8.7 Несколько более сложных примеров

(Для тех, кому интересно)

Теория многочленов в математике развивалась в связи с решением уравнений и делимостью целых чисел. И в тех и в других задачах полезно разложить многочлен на множители, и именно поэтому разложение на множители является основной задачей теории многочленов.

Для решения этой задачи в разных случаях придумано немало приёмов и формул, некоторые из которых вам уже известны.

Но, как уже говорилось, общего алгоритма разложения многочлена на множители нет. Это всегда искусство. Это красиво, но не просто.

Вспомним, например, известную вам формулу разности кубов:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Мы легко доказали эту формулу, преобразовав правую часть и получив левую. Это оказалось несложным только потому, что формула была сразу предьявлена. Но можно попробовать самим открыть эту формулу. Например, так:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= a^3 - a^2b + a^2b - b^3 = \\ &= a^2(a - b) + b(a^2 - b^2) = a^2(a - b) + b(a - b)(a + b) = \\ &= (a - b)(a^2 + b(a + b)) = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Использованный приём «прибавить — вычесть» вам, конечно, известен. Он очень эффективен, и с его помощью в математике доказывается немало трудных теорем. Однако главная трудность состоит в неясности, что именно надо прибавить и вычесть, чтобы разложить многочлен на множители. Поэтому часто приходится делать много попыток, отказываясь от тупиковых идей и путей решения.

Научиться разложению на множители, развить свою фантазию и изобретательность можно только на собственном опыте.

Пример 1. Разложим на множители двучлен $n^4 + 4$.

Выражение $n^4 + 4$ можно записать в виде суммы квадратов: $n^4 + 4 = (n^2)^2 + 2^2$. Далее естественно попробовать прибавить и вычесть удвоенное произведение n^2 и 2, т. е. $4n^2$. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= (n^2)^2 + 4n^2 + 2^2 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = \\ &= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n). \end{aligned}$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$\begin{aligned} &x^3 - 6x^2 + 11x - 6. \\ &x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - 6x^2 + 12x - x - 6 = \\ &= (x^3 - x) - (6x^2 - 12x + 6) = x(x^2 - 1) - 6(x^2 - 2x + 1) = \\ &= x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1)^2 = (x - 1)(x(x + 1) - 6(x - 1)) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6x + 6) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6). \end{aligned}$$

Многочлен на множители разложен, и можно сказать, что поставленная задача решена. Однако можно продолжить преобразования и разложить на множители ещё и многочлен $x^2 - 5x + 6$:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = \\ &= (x - 2)(x - 3). \end{aligned}$$

Получился более красивый результат:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Пример 3. Решим уравнение $x^4 + x^2 - 2 = 0$.

Мы сможем решить это уравнение, если разложим его левую часть на множители. Это можно сделать, воспользовавшись знакомой вам формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 2 &= x^4 - 1 + x^2 - 1 = \\ &= ((x^2)^2 - 1) + (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + (x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2). \end{aligned}$$

Итак, мы разложили многочлен на множители и можем записать данное уравнение в виде $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 2) = 0$.

Двучлен $x^2 + 2$ всегда положителен. Поэтому остаётся рассмотреть случай, когда $x - 1 = 0$ или $x + 1 = 0$. Таким образом, уравнение имеет два корня: -1 и 1 .

Заметим, что применённый нами способ разложения многочлена $x^4 + x^2 - 2$ на множители вовсе не единственно возможный. Можно, например, разложить этот многочлен на множители, используя тот же приём «прибавить — вычесть», но уже совсем по-другому:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 2 &= x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 1 + x^2 - 2 = \\ &= (x^4 - 2x^2 + 1) + 3x^2 - 3 = (x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 1 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2). \end{aligned}$$

Разложите на множители многочлен (913—914).

913 а) $a^3 - 5a^2 + 9a - 5$; б) $x^4 + 4x^2y^2 - 5y^4$.

914 а) $n^4 + n^2 + 1$; б) $n^8 + n^4 + 1$.

915 Решите уравнение $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.

916 Докажите разными способами, что:

а) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

б) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Дополнительные задания

● **Вынесение общего множителя за скобки**

917 Вынесите за скобки общий множитель:

а) $a(x - 2) - b(x - 2) + c(2 - x)$;

б) $2a(x - y) + 2b(y - x) - c(x - y)$.

918 Упростите выражение, применяя способ вынесения за скобки общего множителя:

а) $x(x^2 + xy + y^2) - x(x^2 - xy + y^2)$;

б) $(m(3m - 2n) - m(3n - 2m))n$.

919 Вынесите за скобки общий множитель:

а) $2^{n+1} + 2^n$;

в) $3^{2n} - 3^n$;

б) $5^{n-1} - 5^{n+1}$;

г) $7^{n+1} + 7^n + 7$.

920 Сократите дробь:

а) $\frac{2ab-2a}{4bc-4c}$; б) $\frac{a^2-a}{a^3-a^2}$; в) $\frac{(m-c)^2}{c^2-cm}$; г) $\frac{m^2-2mn+n^2}{an-am}$.

921 Проверьте справедливость равенств:

$$2 \cdot 3 + 3 = 3^2; \quad 3 \cdot 4 + 4 = 4^2; \quad 4 \cdot 5 + 5 = 5^2.$$

Докажите, что если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

Способ группировки

922 Разложите на множители многочлен:

а) $xyz + 4xz + 3xy + 12x$; в) $m^3 + m^2n - m^2a - mna$;
б) $2a + a^2 + 2a^3 + a^4$; г) $b^4 - b^3 + b^2 - b$.

923 Разложите на множители трёхчлен, заменив среднее слагаемое суммой двух одночленов:

а) $x^2 + 6xy + 5y^2$; г) $x^2 + 8x + 7$;
б) $3a^2 + 10ab + 3b^2$; д) $c^2 - 9bc + 20b^2$;
в) $a^2 + 3a + 2$; е) $n^2 + 2n - 3$.

924 Разложите на множители:

а) $3xyz + x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$.

Указание. Представьте выражение $3xyz$ в виде суммы $xyz + xyz + xyz$ и сгруппируйте члены многочлена.

б) $3abc + ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) + ab + bc + ac$.

925 Сократите дробь:

а) $\frac{ax+ay-bx-by}{x^2+xy}$; в) $\frac{ax-ay-x^2+xy}{ax-a^2}$;
б) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ac-bc+bd-ad}$; г) $\frac{b^2-2b+1}{c-bc+a-ab}$.

Разность квадратов

926 Разложите на множители:

а) $a^{2n} - 1$; б) $4 - x^{2n}$; в) $y^{4n} - z^2$; г) $b^{2n} - c^2$.

927 Сократите дробь:

а) $\frac{x+2}{4-x^2}$; б) $\frac{a^2-ax}{a^2-x^2}$; в) $\frac{x^2-y^2}{2ay+2ax}$; г) $\frac{x^2+2xy+y^2}{2x^2-2y^2}$.

928 Представьте выражение в виде многочлена, используя формулу разности квадратов:

а) $(m-n)(m+n)(m^2+n^2)$; в) $((2c+d)^2 - (c+2d)^2) \cdot 3cd$;
б) $(x+1)(x-1)(x^2+1)x^2$; г) $((a^2+a)^2 - (a^2-a)^2) \cdot 5a^2$.

● Применение нескольких способов разложения на множители

Разложите на множители (929—931).

- 929 а) $3z^2 - 12$; д) $2b^3 + 54$; и) $m - m^3$;
 б) $2x^2 - 50$; е) $3m^3 - 81$; к) $4x^2 + 8x + 4$;
 в) $5a^2 + 10a + 5$; ж) $x^3 + 2x^2 + x$; л) $9y - 4y^3$;
 г) $2y^2 - 8y + 8$; з) $ax^2 - a$; м) $ax^3 - 8a$.
- 930 а) $a^3(a - b) - b^3(a - b)$; в) $p^3(p - 1) - 8(p - 1)$;
 б) $x^3 + 8y^3 - (x + 2y)$; г) $(a^3 + b^3) + ab(a + b)$.
- 931 а) $2x^3 - 2xy^2 - 6x^2 + 6y^2$; в) $36x^3 - 144x - 36x^2 + 144$;
 б) $5a^2 - 5b^2 - 10a^3b + 10ab^3$; г) $y^3 + ay^2 - b^2y - b^2a$.

932 Сократите дробь:

а) $\frac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^4 - 2a^2 + 1}$; б) $\frac{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}{x^2 - y^2 + z^2 + 2xz}$.

933 Разложите выражение на множители двумя способами:

1) представьте один из двучленов, заключённых в скобки, в виде суммы или разности двух других, например: $x - z = (x - y) + (y - z)$, а затем примените группировку;

2) раскройте скобки в первых двух слагаемых, а затем сгруппируйте члены так, чтобы получился общий множитель:

а) $xy(x - y) - xz(x - z) + yz(y - z)$;
 б) $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$.

● Решение уравнений

934 Решите уравнение:

а) $(x - 2)(x + 3) = x(2 - x)$; в) $5(9 - x^2) = x(x - 3)$;
 б) $x(2x + 1) = (2x + 1)^2$; г) $2x(x + 1) = x^2 - 1$.

935 При каких значениях переменной равны значения выражений:

а) $5x(x - 1)$ и $x - 1$; б) $b - 6$ и $2b(b - 6)$?

Найдите корни уравнения (936—937).

936 а) $\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right)^2 - 25 = 0$; в) $4 - \left(x - \frac{x}{5}\right)^2 = 0$;
 б) $\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{4}\right)^2 - 9 = 0$; г) $1 - \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right)^2 = 0$.

937 а) $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$; в) $1 - 3x + x^2 - 3x^3 = 0$;
 б) $2x^3 + 24x^2 + 72x = 0$; г) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$.

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Какие способы разложения многочленов на множители вы знаете?
- 2 На основе какого свойства действия выполняется вынесение за скобки общего множителя? Объясните на примере многочлена $12ab^2 + 3a^2b$, как вынести за скобки общий множитель.
- 3 Объясните на примере многочлена $ax - bx + ay - by$, как выполняется разложение на множители способом группировки. Покажите разные возможности группировки слагаемых.
- 4 Запишите формулу разности квадратов и докажите её. Составьте несколько выражений, которые можно разложить на множители с помощью этой формулы.
- 5 Запишите формулу разности кубов и докажите её. Покажите на примере выражения $8 - 27y^3$, как применить эту формулу для разложения его на множители.
- 6 Запишите формулу суммы кубов и докажите её. Покажите на примере выражения $1 + \frac{1}{8}a^3$, как применить эту формулу для разложения его на множители.
- 7 Сформулируйте условие равенства нулю произведения двух или нескольких чисел.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

Вынесите за скобки общий множитель (1–4).

- | | |
|------------------|----------------------------|
| 1 $9x^2 + 3x$. | 3 $6xy + 3x^2y - 12xy^2$. |
| 2 $2ab - ab^2$. | 4 $5a^4 - 10a^3 + 10a^2$. |

Разложите на множители (5–8).

- | | |
|---------------------------|--------------------|
| 5 $y(y - 1) + 2(y - 1)$. | 7 $x^2 - 64$. |
| 6 $ax - ay + 2x - 2y$. | 8 $9a^2 - 16b^2$. |

Сократите дробь (9–12).

- | | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|
| 9 $\frac{x^2 + 3x}{3a + ax}$. | 10 $\frac{b^2}{b^2 + bc}$. | 11 $\frac{2a + 4}{a^2 - 4}$. | 12 $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy}$. |
|--------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|

Выполните действия (13–16).

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| 13 $(x - a)(x + a)$. | 15 $(a + b)^2 - (a - b)(a + b)$. |
| 14 $(2p - 3n)(2p + 3n)$. | 16 $(x - 1)(x + 1) - x(x - 3)$. |

Разложите на множители (17–20).

17 $a^3 - 4a$. 19 $3a^2 - 6ab + 3b^2$.

18 $ax^2 - ay^2$. 20 $ax^2 + 2ax + a$.

Решите уравнение (21–24).

21 $(x - 12)(3x + 9) = 0$. 23 $x^2 + 7x = 0$.

22 $(x + 2)^2 = 0$. 24 $x^2 - 25 = 0$.

Проверьте себя (тест)

- 1 Укажите общий множитель, который можно вынести за скобки в многочлене $6xy^2 - 15xy + 12x^2y$.

1) $6xy^2$ 2) $6xy$ 3) $3xy^2$ 4) $3xy$

- 2 Дан многочлен $8ab - 10ac$. Вынесите за скобки множитель $-2a$.

1) $-2a(4ab - 5ac)$ 3) $-2a(5c - 4b)$
2) $-2a(4b + 5c)$ 4) $-2a(5ac - 4ab)$

- 3 Сократите дробь $\frac{ax-2a}{ax}$.

- 4 В каких случаях выражение $a(a - y) + x(y - a)$ разложено на множители правильно?

1) $(a - y)(a - x)$ 3) $(a - y)(x - a)$
2) $(y - a)(x - a)$ 4) $(y - a)(a - x)$

- 5 Какой из одночленов нужно вписать вместо многоточия в многочлен $x^2y - 2xy^2 - 6x \dots$, чтобы его можно было разложить на множители способом группировки?

1) $+12y$ 2) $+6y$ 3) $-2y$ 4) $-12y$

- 6 Для разложения многочлена $8a^2 - 4a + 2ax - x$ на множители его члены сгруппировали:

1) $(8a^2 - 4a) + (2ax - x)$
2) $(8a^2 + 2ax) - (4a + x)$
3) $(8a^2 - x) - (4a - 2ax)$

Какие из этих способов группировки подходят для того, чтобы выполнить разложение на множители?

- 7 Разложите на множители многочлен $x^2y - 3xy - xz + 3z$.

- 8 Какое из выражений нельзя разложить на множители, используя формулу разности квадратов?
 1) $8x^2 - y^2$ 2) $0,01a^2 - b^2$ 3) $9c^4 - 16$ 4) $25m^2 - 81n^2$
- 9 Разложите на множители $0,25x^2y^2 - z^2$.
- 10 Сократите дробь $\frac{4a^2 - 4a + 1}{4a^2 - 1}$.
 1) $\frac{1}{2a+1}$ 2) $\frac{2a-1}{2a+1}$ 3) $\frac{1}{4a+1}$ 4) $\frac{4a-1}{4a+1}$
- 11 Упростите выражение $(c-2)(c+2) - (c-1)^2$.
 1) $2c - 5$ 2) $-2c - 3$ 3) -3 4) -1
- 12 Какой двучлен можно разложить на множители, используя формулу суммы кубов?
 1) $9x^3 + 27a^3$ 2) $9x^3 - 27a^3$ 3) $8x^3 + 27a^3$ 4) $8x^3 - 27a^3$
- 13 Закончите разложение на множители: $64m^3 - 1 = (4m - 1)(\dots)$.
 1) $m^2 + m + 1$ 3) $16m^2 + 4m + 1$
 2) $16m^2 + 8m + 1$ 4) $16m^2 - 4m + 1$
- 14 Разложите на множители $y^4 - 81$.
- 15 Какой из способов не применяется при разложении на множители многочлена $2a^2 - 2ab - 6a^2 + 6b^2$?
 1) вынесение за скобки общего множителя
 2) группировка
 3) формула разности квадратов
 4) формула квадрата разности
- 16 Какое из утверждений неверно?
 1) если произведение двух чисел равно нулю, то хотя бы одно из этих чисел равно нулю
 2) если хотя бы одно из двух чисел равно нулю, то их произведение равно нулю
 3) если хотя бы одно из двух чисел не равно нулю, то произведение этих чисел не равно нулю
 4) если произведение двух чисел не равно нулю, то ни одно из этих чисел не равно нулю
- 17 Решите уравнение $(x-2)(2x+6) = 0$.
 1) $x = 2$ 2) $x = -3$ 3) $x = 2, x = -3$ 4) $x = -2, x = 3$
- 18 Найдите корни уравнения $x^3 - 9x = 0$.

Частота и вероятность

Солнце взойдёт на востоке. Из куриного яйца может вылупиться петух, а может курица. Петух запоёт соловьём. Всё это примеры событий, первое из которых произойдёт обязательно, второе событие закончится одним из двух результатов, третье событие не может произойти никогда. И если с первым и третьим событиями всё понятно, то второе представляет интерес. Как часто вылупляются петухи, а как часто — куры? Оказывается, здесь есть определённая закономерность. Вопросами разведения петухов и кур занимаются специалисты в области сельского хозяйства, а вот изучением закономерностей в мире случайного — специальная наука *теория вероятностей*.

9.1 Случайные события

1 Мы часто говорим: «это возможно», «это невозможно», «это маловероятно», «это обязательно случится». Подобные выражения обычно используют, когда речь идёт о возможности наступления события, которое в одних и тех же условиях может произойти, а может и не произойти.

Такие события называют случайными. Купив лотерейный билет, вы можете выиграть, а можете и не выиграть; на выборах кандидат может победить, а может и не победить; жарким летним днём может случиться гроза, а может и не случиться. Выигрыш в лотерею, победа на выборах, гроза — всё это примеры **случайных событий**.

Есть события, которые в определённых условиях происходят всегда, их называют **достоверными**. В нормальных условиях при 0°C вода замерзает; если опрокинуть стакан с водой, то она обязательно выльется.

Но есть события, которые при данных условиях никогда не происходят, их называют **невозможными**. Например, невозможно не вылить воду из стакана, перевернув его вверх дном (если, конечно, это вода, а не лёд).

Заметим, что в математике достоверные и невозможные события относят к случайным.

Пример 1. Бросают игральный кубик (рис. 9.1).

Рассмотрим следующие события:

А: выпадет семь очков;

В: выпадет меньше десяти очков;

С: выпадет пять очков;

Д: выпадет чётное число очков.

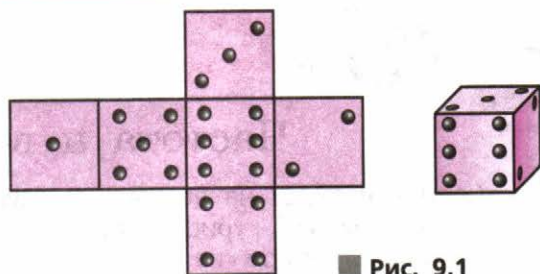


Рис. 9.1

Событие А — невозможное. При бросании кубика не может выпасть семь очков.

Событие В — достоверное. В самом деле, сколько бы ни выпало очков, их всегда будет меньше десяти.

События С и Д могут произойти, а могут и не произойти. Чтобы показать это, надо привести пример такой ситуации, или, как говорят, такого исхода, когда данное событие происходит, и такого исхода, когда оно не происходит. Событие С произойдёт, только если выпадет пять очков, в остальных случаях оно не произойдёт. А вот событие Д произойдёт, если выпадет два, четыре или шесть очков, и не произойдёт, если выпадет одно, три или пять очков.

Случайные события, которые имеют равные шансы, называют **равновозможными** или **равновероятными**. На устном экзамене ученик берёт один из разложенных перед ним экзаменационных билетов, шансы

взять любой из них равны. **Равновероятным** является выпадение любого числа очков от 1 до 6 при бросании симметричного игрального кубика, орла или решки при бросании правильной монеты.



2 Но не все события являются равновероятными. Будильник может не зазвонить, лампочка не загореться, автобус не прийти, но все эти события в обычных условиях маловероятны. Более вероятно, что будильник зазвонит, лампочка загорится, а автобус придёт.

У одних событий *шансов* произойти больше, значит, они более вероятны, а у других событий шансов произойти меньше, они менее вероятны. У невозможных событий нет никаких шансов произойти, а достоверные, наоборот, имеют все шансы произойти и произойдут обязательно.

Можно ли оценить шансы наступления интересующего нас случайного события? Давайте вернёмся к примеру 1 и выясним, каковы шансы наступления рассмотренных в нём событий.

У события В (оно достоверное) есть все шансы произойти, а у события А (оно невозможное) нет ни одного. При бросании кубика

из шести возможных исходов только при одном выпадет пять очков, значит, у события C есть только один шанс из шести. Чётное число очков есть на трёх гранях кубика из шести, следовательно, есть три шанса из шести, что событие D произойдёт. Значит, событие D вероятнее события C .

Вообще шансы имеет смысл сравнивать как дроби: в знаменателе дроби — сколько всего возможно исходов, в числителе — сколько из них отвечают конкретному событию. Чем больше дробь, тем вероятнее событие.

Кстати, на трёх других гранях кубика нечётное число очков, значит, события «выпадет чётное число очков» и «выпадет нечётное число очков» равновероятны. Эти два события интересны ещё и тем, что обладают таким свойством: если происходит одно из них, то другое не происходит. Такие события называют **противоположными**. Отметим, что противоположные события совсем не обязательно равновероятны. Вы легко убедитесь в этом, например, если сформулируете событие, противоположное событию C , и оцените его шансы.

Но оценка шансов не такая простая вещь, как может показаться. В спорте, скажем, принято оценивать шансы на победу той или иной команды. Например, известно, что футбольные команды «Спартак» и ЦСКА встречались за свою историю 122 раза. В 51 матче победили спартаковцы, а в 42 — армейцы. Означает ли это, что в ближайшем матче шансы «Спартака» выше? Не всё так однозначно, ведь это данные за 75 лет, и многое зависит от того, в каком состоянии команды находятся накануне очередной встречи.

Иногда удаётся сравнить шансы наступления события с помощью элементарной логики. Когда из наступления события B обязательно следует наступление события A , то говорят, что B *влечёт за собой* A , и оно, естественно, будет менее вероятно, чем A . С помощью кругов Эйлера такое отношение событий показано на рисунке 9.2.

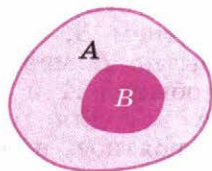


Рис. 9.2

Пример 2. В группе российских туристов, выезжающих за границу, есть несколько человек, которые говорят только по-английски, и несколько человек, которые, кроме английского, говорят ещё на одном иностранном языке. Рассмотрим события:

A : случайно выбранный турист говорит по-английски;

B : случайно выбранный турист говорит на двух иностранных языках.

Наступление события B означает наступление и события A . Обратное неверно: турист может говорить только на одном иностранном языке — на английском. Значит, событие A более вероятно, чем событие B .



Дама пик



Дама червей



Дама бубен



Дама крестей

Пример 3. Из перетасованной колоды карт вынимают одну карту. Изобразим с помощью кругов Эйлера, как соотносятся друг с другом следующие события:

- A: вынута карта пиковой масти;
- B: вынута дама пик;
- C: вынута дама.

Дама пик — одна из карт пиковой масти, поэтому событие B влечёт за собой событие A. У события C четыре исхода: дама пик, дама крестей, дама червей и дама бубен. Один из них совпадает с событием B, а три других нет. Значит, событие B менее вероятное, чем любое из событий A и C. Посмотрите, как это изображено на рисунке 9.3. А вот для того, чтобы узнать, какое из событий A и C более вероятное, нужен уже подсчёт шансов.

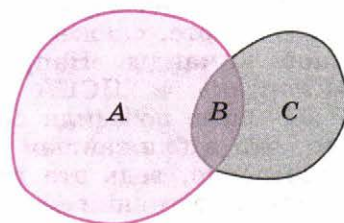


Рис. 9.3

4 Мы живём в мире случайных событий, поэтому важно понимать, можно ли найти какие-то закономерности в мире случайного. Мы хотим знать, каким будет следующее лето, это важно, например, агрономам для определения того, какие сельскохозяйственные культуры и в какое время сеять. Правительство хочет знать, какими в следующем году будут цены на нефть, так как с их учётом планируется государственный бюджет.

Не всегда можно подсчитать шансы так, как мы это сделали. Часто шансы оценивают на основе имеющихся данных. Например, на основе наблюдений за атмосферными явлениями синоптики предсказывают вероятность выпадения осадков, в результате в прогнозе погоды мы слышим: «дождь маловероятен» или «вероятность осадков 5%». Помогает оценить шансы и жизненный опыт. Именно из опыта многих поколений людей родился шуточный «закон бутерброда», который гласит, что «бутерброд всегда падает маслом вниз».

- Приведите по три примера достоверных и невозможных событий, а также событий, о которых нельзя сказать, что они обязательно произойдут или обязательно не произойдут.
- Назовите все исходы, при которых произойдёт событие
А: при бросании игрального кубика выпало не менее пяти очков.
- Какое событие при бросании игрального кубика более вероятно:
А: выпало не менее пяти очков; В: выпало более пяти очков?
- Приведите пример равновероятных событий при бросании игрального кубика.
- Назовите событие, противоположное событию С из примера 1. Сравните шансы этих событий.
- Изобразите отношение событий С и D из примера 1 с помощью кругов Эйлера.

А

938 Какие из перечисленных событий достоверные, невозможные:

- а) вас пригласят сниматься в кино;
- б) вода в чайнике, стоящем на плите, закипит;
- в) день рождения одного из ваших знакомых — 30 февраля;
- г) вы выиграете, участвуя в лотерее;
- д) вы выиграете, участвуя в беспроигрышной лотерее;
- е) после четверга будет пятница;
- ж) после пятницы будет четверг?

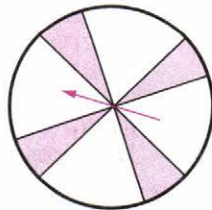
939 В коробке лежат 10 красных, одна зелёная и две синие ручки. Из коробки наугад вынимают две ручки. Какие из следующих событий невозможные, достоверные:

- А: будут вынуты две красные ручки;
- В: будут вынуты две зелёные ручки;
- С: будут вынуты две синие ручки;
- Д: будут вынуты две ручки разных цветов;
- Е: будут вынуты два карандаша?

940 Ваня и Дима решают с помощью вертушки (рис. 9.4), как им провести воскресенье: если стрелка остановится на белом поле, они пойдут в кино; если на голубом — на стадион. Какое из событий вероятнее: ребята пойдут на стадион или в кино? Нарисуйте какую-нибудь вертушку, которая даёт равные шансы.

941 Из колоды карт вынимают одну карту.

- а) Назовите все исходы, при которых произойдёт событие:
- А: вынутая карта — туз;
- В: вынута карта бубновой масти.
- б) Сколько исходов имеет событие
- С: вынута карта старше дамы?
- в) Приведите пример равновероятных событий.



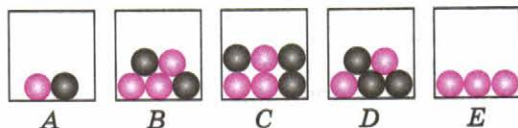
■ Рис. 9.4

942 ■ ДЕЙСТВУЕМ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ■ Являются ли равновероятными события:

- а) вылет самолёта по расписанию и задержка рейса;
- б) штатная посадка и аварийная посадка самолёта;
- в) выпадение одного очка и шести очков при бросании кубика;
- г) вынимание из колоды карт туза и вынимание шестёрки;
- д) попадание и промах при стрельбе по мишени;
- е) выпадение снега и выпадение дождя 1 января в том регионе, где вы живёте?

943 Антон, Борис и Вадим учатся в классах 7А, 7Б, 7В соответственно. От каждого класса по жребию выбирают одного делегата в школьный комитет. У кого из друзей больше шансов стать делегатом, если в 7А учатся 25 человек, в 7Б — 22 человека, в 7В — 28 человек?

944 В пяти коробках лежат чёрные и красные шары, одинаковые на ощупь (рис. 9.5). Из каждой коробки не глядя вынимают один шар. Перечислите коробки в порядке возрастания шансов вынуть чёрный шар.



■ Рис. 9.5

945 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Верно ли, что события *A* и *B* являются противоположными?

- а) *A*: вам никто не позвонит с 5 до 6 часов утра;
B: вам кто-нибудь позвонит с 5 до 6 часов утра;
- б) *A*: из колоды карт вынута карта красной масти;
B: из колоды карт вынута карта чёрной масти;
- в) *A*: при бросании игрального кубика выпало одно очко;
B: при бросании игрального кубика выпало шесть очков.

946 ■ АНАЛИЗИРУЕМ ■ Назовите событие, противоположное данному событию:

- а) при стрельбе по летающим тарелкам стрелок попал по мишени;
 - б) при бросании монеты выпал орёл;
 - в) куплен неисправный телевизор;
 - г) по результатам забега спортсмен вышел в финал;
 - д) при бросании кубика выпало три очка.
- В каком из случаев эти два события равновероятны?

947 В коробке красный, синий, белый и чёрный шары, одинаковые на ощупь. Из коробки вынимают наугад один шар. Назовите исходы, при которых произойдёт событие:

А: вынут красный или белый шар;
 В: вынутый шар — не синий;
 С: оставшиеся в коробке шары разных цветов.
 Сравните шансы этих событий.

948 Бросают игральный кубик. Сравните шансы наступления событий:

А: выпадет три очка;
 В: выпадет не три очка;
 С: выпадет больше трёх очков;
 D: выпадет меньше трёх очков.

949 ■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ ■ Вам предстоит выполнять тест по математике. Исходя из своего опыта, оцените шансы следующих событий:

А: я не сделаю ни одной ошибки;
 В: я сделаю хотя бы одну ошибку;
 С: я получу двойку;
 D: никто в классе не получит пятёрку.
 Дополните утверждение: «Событие ... более вероятно, чем событие ...».

950 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Перед футбольным матчем «Спартак» — «Динамо» болельщики обсуждают шансы событий:

А: будет ничья;
 В: не будет забито ни одного мяча;
 С: «Спартак» не выиграет;
 D: «Спартак» выиграет.

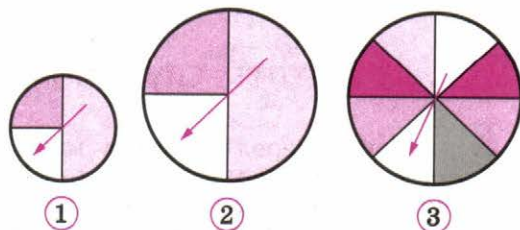
Изобразите с помощью кругов Эйлера, как эти события соотносятся друг с другом.

Подсказка. Начните с противоположных событий.

951 ■ ИЩЕМ ИНФОРМАЦИЮ ■ Найдите в литературе, периодической печати, Интернете информацию о ситуациях, когда важно прогнозировать некоторое событие, оценивать шансы его наступления.

Б

952 Вы выигрываете, если стрелка останавливается на белом поле. Какая из вертушек, изображённых на рисунке 9.6, даёт вам больше шансов на выигрыш?



■ Рис. 9.6

953 ■ АНАЛИЗИРУЕМ ■ Из колоды в 36 карт наугад вытягивают одну. Оцените шансы следующих событий:

- A: на этой карте — король;
 B: эта карта красной масти;
 C: эта карта бубновой масти.

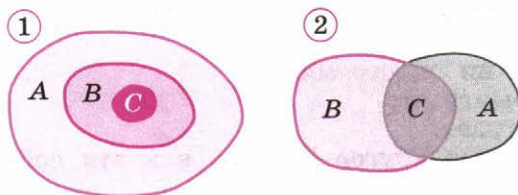
954 Сравните шансы событий:

- A: в лотерее «Спортлото 6 из 49» угадать ровно 3 номера;
 B: в лотерее «Спортлото 6 из 49» угадать хотя бы 3 номера.

955 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Чтобы открыть первый кодовый замок, надо нажать 3 цифры из 10, а чтобы открыть второй замок — 7 цифр из 10. Порядок цифр не учитывается. Верно ли, что взломать второй замок труднее?

956 ■ АНАЛИЗИРУЕМ ■ В финальный забег олимпийского турнира вышел российский спортсмен. На каком из рисунков (рис 9.7) представлено соотношение следующих событий:

- A: в забеге будет установлен рекорд России;
 B: в забеге будет установлен олимпийский рекорд;
 C: в забеге будет установлен мировой рекорд?



■ Рис. 9.7

957 ■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ ■ В коробке 3 красных, 3 белых и 3 чёрных шара, одинаковых на ощупь. Из коробки вынимают наугад n шаров. Рассмотрим следующее событие A: среди вынутых шаров окажутся шары всех трёх цветов. При каких значениях n событие A — невозможное, а при каких — достоверное?

9.2 Частота случайного события

1 Когда перед началом игры игроки хотят договориться, кто из них сделает первый ход, то обычно подбрасывают монету. Так поступают потому, что выпадание орла или решки считается равновероятным и заинтересованные стороны имеют равные шансы.

Результат подбрасывания монеты, кнопки, игрального кубика, раскрытия книги наугад заранее предсказать нельзя, в каждом та-

ком эксперименте результат зависит от случая, поэтому их называют *эксперименты со случайными исходами* или просто *случайными экспериментами*. Важно, что такие случайные эксперименты можно повторять многократно, причём в одних и тех же условиях.

Обычно многократные случайные эксперименты проводят, чтобы определить, насколько часто появляется интересующий нас результат. Например, как часто при подбрасывании монеты выпадает орёл или при одновременном подбрасывании двух кубиков выпадает двенадцать очков. Для этого по результатам серии экспериментов вычисляется частота наблюдаемого события.

Определение

Частотой случайного события в серии экспериментов называют отношение числа экспериментов, в которых это событие произошло, к общему числу экспериментов.

Частота показывает, какую часть от общего числа проведённых экспериментов составляяют эксперименты, завершившиеся интересующим нас результатом.

Пусть в серии из N экспериментов интересующее нас событие произошло n раз, тогда его частота равна $\frac{n}{N}$. Поскольку $0 \leq n \leq N$, то частота выражается числом от 0 до 1. Если событие не произошло ни разу, т. е. $n = 0$, то его частота в серии экспериментов равна 0. Если оно происходило каждый раз, то его частота равна 1. Частоту принято выражать также и в процентах.

2 Представим, что монеты у наших игроков не оказалось, и один из них предложил подбросить кнопку. Можно ли считать такую замену справедливой, т. е. останутся ли шансы сторон равными? Давайте разберёмся.

Кнопка может упасть либо остриём вверх, либо остриём вниз (рис. 9.8). Чтобы ответить на вопрос, равны ли шансы этих исходов, надо много раз подбросить кнопку и собрать информацию о результатах. Если окажется, что при многократном подбрасывании кнопки частота падения кнопки остриём вниз и частота падения кнопки остриём вверх будут примерно равными, то это означает, что эти два исхода практически равновероятны и замена монеты на кнопку справедлива. Если же результаты будут заметно отличаться, то эти два исхода равновероятными считать нельзя.



Рис. 9.8

Пример. В классе проводилась серия экспериментов по подбрасыванию кнопки. Ученики разбились на пары, каждая из которых 100 раз подбросила кнопку. Перед вами таблица результатов, полученных одной из пар.

Таблица 1

Событие	Подсчёты	Всего событий
Остриём вниз	### ### ### ### ### ### ### ###	44
Остриём вверх	### ### ### ### ### ### ### ### ### ### /	56
Итого		100

Из таблицы 1 видно, что частота падения кнопки остриём вниз в этой серии экспериментов равна 0,44, а частота падения кнопки остриём вверх равна 0,56.

Такие серии по 100 экспериментов в классе провели 10 пар учеников. Каждая пара получила свою таблицу результатов. Поскольку все кнопки из одной коробки можно считать одинаковыми, они свели результаты в одну общую таблицу. В первый столбец таблицы они внесли результаты экспериментов, проведённых одной парой учеников. Далее каждый раз, заполняя следующий столбец таблицы, к результатам предыдущего столбца прибавляли результаты, полученные следующей парой учеников, и подсчитывали соответствующие частоты.

Таблица 2

Число экспериментов		100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Остриём вниз	Всего событий	44	94	130	173	221	265	310	356	403	448
	Частота	0,44	0,47	0,43	0,43	0,44	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45
Остриём вверх	Всего событий	56	106	170	227	279	235	390	444	497	552
	Частота	0,56	0,53	0,57	0,57	0,56	0,56	0,56	0,55	0,55	0,55

Из таблицы 2 видно, что при увеличении числа экспериментов частота каждого события выравнивается, или, как говорят, *стабилизируется*. Частота события «остриём вниз» стабилизируется около числа 0,45, а частота события «остриём вверх» — около числа 0,55. Значит, шансы падения кнопки остриём вниз несколько меньше, чем остриём вверх.

Стабилизация частоты будет нагляднее, если данные представить графически. На рисунке 9.9 построен график зависимости частоты результата «остриём вниз» от числа экспериментов. Для этого каждая пара чисел таблицы (число экспериментов — частота) отмечена точкой на координатной плоскости. Полученные точки соеди-

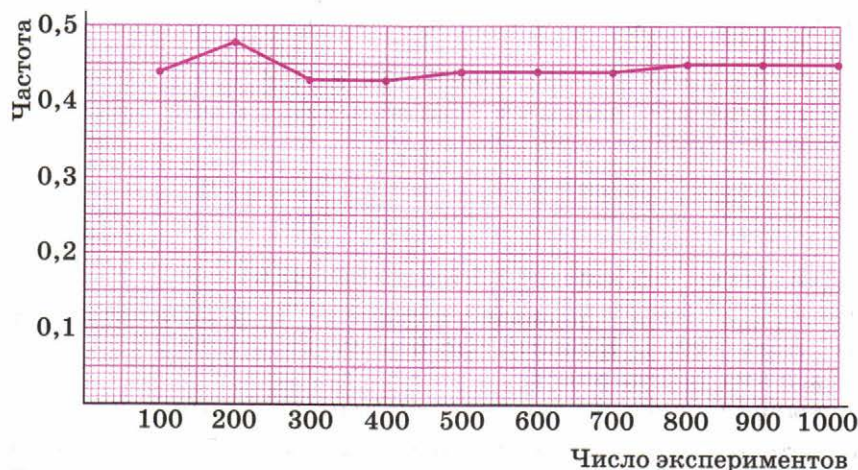


Рис. 9.9

нены ломаной, которая при увеличении числа экспериментов становится практически горизонтальной прямой.

3 К экспериментам со случайными исходами относят не только эксперименты, которые мы проводим сами. К ним относят и самые разные опыты, испытания, наблюдения, измерения, проведённые кем-то другим, а также наблюдения за явлениями природы. Важно здесь то, что их результаты зависят от случая, но происходят каждый раз примерно в одних и тех же условиях. Надо лишь зафиксировать эти результаты. Случайными исходами таких испытаний являются, например, количество петухов и количество кур, вылупляющихся из каждой сотни яиц, температура воздуха в один и тот же день в одном и том же месте, итоги еженедельной лотереи, результаты стрельбы по мишени, уровень весеннего разлива реки. В экспериментах со случайными исходами удивительно то, что, хотя результат каждого отдельного испытания зависит от случая, при проведении большого числа таких испытаний выявляются отчётливые закономерности. Частота соответствующих событий позволяет строить обоснованные прогнозы для решения задач, возникающих в жизни.

- Что называют частотой случайного события?
- Назовите два свойства случайного эксперимента.
- Монету подбросили 1000 раз, при этом 495 раз выпал орёл. Чему равна частота события «выпал орёл» в этой серии экспериментов?
- Ответьте на вопросы по таблице 2:
 - а) Чему равна частота события «остриём вниз» после 300 испытаний? события «остриём вверх» после 500 испытаний?

б) После какого числа испытаний частота события «остриём вниз» стала равна 0,45?

в) Сколько раз кнопка упала остриём вверх у 6-й пары?

- Приведите примеры природных явлений, которые можно считать экспериментами со случайными исходами.

А

ДЕЙСТВУЕМ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ (958–960)

- 958** Игральный кубик подбросили 200 раз, при этом 28 раз выпало шесть очков. Найдите частоту события:

А: выпало шесть очков;

В: выпало менее шести очков. (Ответ выразите в процентах.)

- 959** За лето на Черноморском побережье было 67 солнечных дней. Какова частота солнечных дней на побережье за лето? пасмурных дней? (Используйте калькулятор.)

- 960** В марте в городе родилось 2348 мальчиков и 2027 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков и частоту рождения девочек в этом месяце. (Используйте калькулятор.)

- 961** Используя данные таблицы 2, представьте графически зависимость частоты появления результата «остриём вверх» от числа проведённых экспериментов.

ЭКСПЕРИМЕНТИРУЕМ (962–964)

- 962** Проведите в классе эксперимент с кнопкой, описанный в этом пункте. Организуйте работу следующим образом:

- Разделитесь на пары. Каждая пара должна подбросить кнопку 200 раз. Один из участников будет подбрасывать кнопку, а другой — фиксировать результаты в таблице.
- Сведите все результаты в общую таблицу.
- Найдите частоту каждого исхода.
- Сопоставьте свой результат с результатом, описанным в тексте пункта.

- 963** Проведите 150 экспериментов по подбрасыванию обычной металлической крышки от бутылки. Каждый из экспериментов может завершиться одним из двух возможных исходов: крышка упадёт вверх дном или вверх зубцами. Полученные результаты оформите в виде таблицы.

Событие	Подсчёты	Всего
А: 		
В: 		
Итого		150

- 1) Подсчитайте частоту события A и события B .
- 2) Пусть двое играют, подбрасывая такую крышку. Один выигрывает при появлении события A , а другой — при появлении события B . Используя полученные статистические данные, определите, справедлива ли эта игра. Что нужно сделать, чтобы ваш вывод был более обоснованным?

964 Проведите 50 экспериментов по подбрасыванию игрального кубика (см. рис. 9.1). Каждый из этих экспериментов может завершиться одним из шести возможных исходов: выпадет 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков.

- 1) Полученные результаты оформите в виде таблицы.
- 2) Сведите все результаты, полученные в классе, в одну общую таблицу.
- 3) Вычислите частоту каждого исхода.
- 4) Какое событие более вероятно: «выпадет одно очко» или «выпадет не одно очко»?
- 5) Как вы считаете, справедливо ли использование кубика в настольных играх?

Б

965 Подсчитано, что частота получения неудовлетворительной оценки на школьном экзамене в городе N равна 0,07. Известно, что в этом городе 100 человек не сдали экзамен.

- а) Найдите примерное число школьников, сдававших экзамен.
- б) Найдите примерное число школьников, сдавших экзамен успешно.

966 Многолетняя проверка показала, что всхожесть семян огурцов определённого сорта составляет 90%. Посеяли 200 семян. Какое число проросших семян следует ожидать?

967 Подсчитано, что частота появления зайца в электропоездах составляет 10%. Известно, что за день 5400 пассажиров купили в кассе билеты. Сколько примерно зайцев ехало за день в электропоездах?

968 Эксперименты состоят в одновременном подбрасывании двух игральных кубиков с вычислением каждый раз суммы выпавших на кубиках очков.

- 1) Какая наименьшая и какая наибольшая сумма очков может при этом получиться?
- 2) Укажите все возможные исходы случайного эксперимента.
- 3) Проведите 50 экспериментов и внесите результаты в таблицу.
- 4) Сведите все результаты, полученные в классе, в общую таблицу. В первой строке этой таблицы укажите все возможные исходы, во второй — сколько всего экспериментов завершилось данным исходом, а в третьей — частоту этого исхода.

5) Постройте столбчатую диаграмму частот, отмечая на горизонтальной оси исходы, а на вертикальной — их частоты.

6) Первый игрок выигрывает, если выпадает 4 очка, второй — если выпадает 8 очков, третий — если выпадает 12 очков. В остальных случаях проводится новый эксперимент, т. е. кубики бросают снова. Исходя из статистических данных, полученных в результате экспериментов, определите, справедлива ли такая игра. Если нет, то у кого из игроков наибольшие шансы выиграть?

969 Готовясь к участию в телеигре «Поле чудес», где по буквам отгадываются слова, Олег задумался: «А какую букву стоит назвать первой, когда в слове ещё не угадано ни одной буквы?»

Понятно, что в такой ситуации выигрышная стратегия — начать игру с самой распространённой в русском языке буквы. Но как её определить? Чтобы помочь Олегу, 33 его одноклассника распределили между собой все буквы алфавита, взяли один и тот же текст и каждый посчитал, сколько раз в нём встречается его буква. Так они экспериментально определили самую распространённую букву русского языка.

Как вы думаете, что это за буква? Чтобы проверить свою догадку, проведите в классе такой же эксперимент, выбрав случайным образом текст из книги, которая есть у всех, например из учебника.

9.3 Вероятность случайного события

Обычай решать спорные вопросы с помощью подбрасывания монеты связан с предположением о том, что орёл и решка выпадают примерно с равной частотой. Это предположение подвергали экспериментальной проверке учёные разных стран и эпох.

В XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи де Бюффон не поленился провести 4040 экспериментов с подбрасыванием монеты, при этом орёл выпал 2048 раз, т. е. у Бюффона частота появления орла получилась равной $\frac{2048}{4040} \approx 0,5069$.

В начале XX в. английский математик Карл Пирсон провёл уже 24 000 экспериментов, при этом орёл выпал 12 012 раз. Значит, у Пирсона частота появления орла получилась равной $\frac{12\,012}{24\,000} \approx 0,5005$.

В таблице 3 помещены результаты, полученные разными исследователями начиная с XVIII в.:

Таблица 3

Исследователь	Число экспериментов	Частота выпадания орла
Бюффон	4040	0,5069
Де Морган	4092	0,5005
Джевоис	20 480	0,5068
Романовский	80 640	0,4923
Феллер	10 000	0,4979
Пирсон	24 000	0,5005

Нетрудно заметить, что серии экспериментов, проведённые в разные эпохи и в разных странах, дают похожий результат: при многократном подбрасывании монеты частота выпадания орла стабилизируется около числа 0,5. Говорят, что **вероятность** выпадания орла равна 0,5. Это число выражает шансы появления события «выпал орёл» при многократном проведении экспериментов. Так как во всех этих сериях экспериментов решка появлялась также примерно в половине случаев, то и вероятность выпадания решки равна 0,5. Вообще вероятность и частота случайного события связаны между собой. *Если случайный эксперимент повторять достаточно много раз, то частота интересующего нас события будет близка к его вероятности.*

Вероятность события обозначается большой латинской буквой P (от французского слова *probabilite*, что означает «вероятность»). Если обозначить событие «выпадет орёл» буквой A , а событие «выпадет решка» буквой B , то полученный результат можно записать так:

$$P(A) = 0,5, P(B) = 0,5.$$

Иногда вероятность выражают в процентах:

$$P(A) = 50\%, P(B) = 50\%.$$

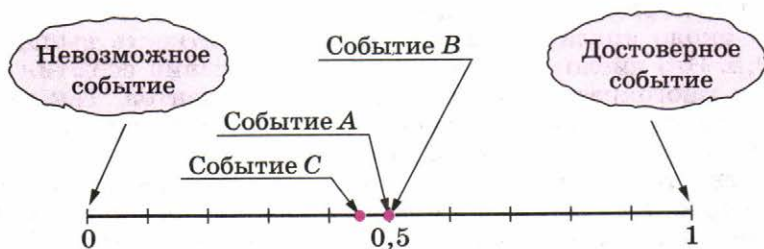
Тот факт, что вероятность появления орла равна 0,5, конечно, не означает, что если вы несколько раз будете бросать монету, то орёл появится ровно в половине случаев. Но если число экспериментов достаточно велико, мы можем сделать прогноз, что орёл выпадет *примерно* в половине случаев. Вообще *по вероятности события можно прогнозировать частоту появления этого события в будущем.*

В случае с подбрасыванием монеты и не проводя экспериментов естественно предположить, что вероятность выпадания каждой стороны монеты равна 0,5. Но во многих ситуациях без проведения многократных экспериментов предсказать вероятность случайного события практически невозможно. Например, если монету заменить на кнопку. В таких случаях оценить вероятность случайного события можно только по его частоте, которая определяется в ходе выполнения многократных экспериментов. При этом чем больше проведено экспериментов, тем точнее можно оценить вероятность события. Так, при проведении большого числа экспериментов с кнопкой частота появления случайного события C : острём вниз —

стабилизируется около числа 0,45. Значит, вероятность выпадания кнопки остриём вниз примерно равна 0,45; $P(C) \approx 0,45$.

Понятно, что вероятность случайного события — это число, заключённое между 0 и 1. Если событие является достоверным, т. е. если оно обязательно происходит при каждом повторении эксперимента, то его частота равна 1, и естественно считать, что и его вероятность равна 1. Невозможное событие не происходит ни при каком повторении эксперимента, поэтому вероятность невозможного события считают равной 0.

Если случайное событие обозначить буквой X , то можно записать, что $0 \leq P(X) \leq 1$. Этому факту можно дать геометрическое истолкование с помощью вероятностной шкалы (рис. 9.10).



- По данным таблицы определите, чему равна частота выпадания решки в каждом исследовании.
- Как связаны частота случайного события и вероятность?
- Где на вероятностной шкале (см. рис. 9.10) надо расположить событие D : кнопка упала остриём вверх?

А

- 970** По статистике на каждые 1000 выпущенных лампочек приходится 3 бракованные. Какова вероятность купить бракованную лампочку? исправную лампочку?
- 971** В таблице приведены данные о продаже фирмой автомобилей за прошлый год. (Используйте калькулятор.)

Марка	A	B	C	D	E
Продано штук	132	787	424	108	320

- а) Оцените вероятность того, что произвольный покупатель выберет в этом году машину марки B . Ответ округлите до сотых.
- б) Автомобили марок A , B , C — отечественные, D и E — иностранные. Оцените вероятность того, что произвольный покупатель выберет отечественный автомобиль.
- в) Расположите случайные события из пунктов а) и б) на вероятностной шкале.

972 ■ РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ ■ Оцените вероятность каждого из возможных исходов случайных экспериментов, предложенных в задаче **963**. Запишите результат, используя символику.

973 Демографы утверждают, что вероятность рождения близнецов приблизительно равна 0,012. В скольких случаях из 10 000 рождений можно ожидать появления близнецов?

■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО (974–975) ■

974 Если вероятность события A составляет 30%, то можно ли утверждать, что при проведении 900 соответствующих случайных экспериментов событие A наступит ровно в 270 из них?

975 Человек купил две батарейки, одна из которых оказалась неисправной. Можно ли исходя из этого с уверенностью утверждать, что вероятность купить неисправную батарейку равна 0,5?

976 ■ РАССУЖДАЕМ ■ При проведении 1000 случайных экспериментов событие A произошло в 998 случаях. Является ли оно достоверным? Дайте словесные характеристики события A .

977 Где на вероятностной шкале расположены маловероятные события? очень вероятные события? практически невероятные события?

Б

978 ■ АНАЛИЗИРУЕМ ■ Используя статистические данные, полученные при решении задачи **964**, оцените:

- а) вероятность выпадания чётного числа очков;
- б) вероятность того, что выпадет не больше 4 очков;
- в) вероятность того, что число выпавших очков не равно 3.

979 Саша купил в магазине пачку чая и решил взвесить её на лабораторных весах (их точность — до 1 миллиграмма). На пачке написан вес — 200 г. Расположите на вероятностной шкале следующие события:

- A : вес пачки больше 200 г;
- B : вес пачки меньше 200 г;
- C : вес пачки ровно 200 г;
- D : вес пачки меньше 500 г;
- E : вес пачки больше 100 г.

980 Эксперимент состоит в одновременном подбрасывании двух монет.

- 1) Укажите все возможные исходы случайного эксперимента.
- 2) Проведите 100 экспериментов и внесите результаты в таблицу.
- 3) Сведите в общую таблицу все полученные результаты.
- 4) Оцените вероятность каждого из возможных исходов.

981 Из пруда было выловлено 90 рыб, которых пометили и выпустили обратно в пруд. Через неделю из пруда выловили 84 рыбы, из которых 5 оказались помеченными. Сколько примерно рыб в пруду?

9.4 Сложение вероятностей

(Для тех, кому интересно)

Ученик, используя полученные знания в области теории вероятностей, решил сделать прогноз своей успеваемости по математике, изучив свои отметки за 5—7 классы. Результаты его исследования представлены в таблице.

Отметка	Количество отметок	Примерная вероятность получения отметки
5 (отлично)	39	0,21
4 (хорошо)	78	0,41
3 (удовлетворительно)	63	0,34
2 (неудовлетворительно)	8	0,04

Какова вероятность того, что очередной ответ ученика будет оценён на «4» или «5»?

Если считать, что все эти годы он учился примерно одинаково, и не учитывать особые обстоятельства, такие, как сложность данной темы, состояние здоровья и т. д., то на этот вопрос ответить нетрудно.

Всего ученик получил 188 отметок, из них ответов на «4» и «5» было $39 + 78$, значит, вероятность можно оценить как

$$\frac{39+78}{188} = \frac{39}{188} + \frac{78}{188} \approx 0,21 + 0,41 = 0,62.$$

Мы видим, что для ученика вероятность получить «хорошо» или «отлично» равна сумме вероятностей двух событий: получить «хорошо» и получить «отлично». Вообще

вероятность получить хотя бы один (неважно, какой именно) из нескольких интересующих нас результатов эксперимента равна сумме вероятностей каждого из этих результатов, если эти результаты несовместимы между собой.

Это правило называется **правилом сложения вероятностей**.

Но что означает, что результаты **несовместимы** между собой? Несовместимыми называют такие события, которые в рассматриваемом эксперименте не могут произойти одновременно.

В приведённом рассуждении очень важно, что получение оценок «4» и «5» одним и тем же учеником за один и тот же ответ — несовместимые события.

Если случайные события совместимы, т. е. могут произойти одновременно, правило сложения вероятностей применять нельзя. В таких случаях используют иные, более сложные законы, с которыми вы познакомитесь в старших классах.

982 Укажите, совместимы события A и B или нет:

- а) A : к остановке подошёл автобус № 3.
 B : к остановке подошёл автобус № 5.
- б) A : идёт дождь.
 B : идут два студента.
- в) A : студент идёт в пальто.
 B : студент идёт в университет.
- г) A : в футбольном матче Россия — Бразилия победит Россия.
 B : в том же футбольном матче Россия — Бразилия победит Бразилия.

983 В лотерее выпущено 100 000 билетов и установлены: 1 выигрыш в 100 000 р., 10 выигрышей по 10 000 р., 100 выигрышей по 1000 р., 1000 выигрышей по 100 р. и 5000 выигрышей по 50 р. Человек купил один лотерейный билет.

- а) Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 1000 р.?
- б) Какова вероятность того, что он выиграет?
- в) Какова вероятность того, что он не выиграет?

Дополнительные задания

Частота и вероятность

984 Игральный кубик подбросили 100 раз. Результаты экспериментов занесли в таблицу.

Количество выпавших очков	Число наступлений события	Частота, %
1	18	
2	12	
3	16	
4	22	
5	18	
6	14	

1) Заполните последний столбец таблицы.

- 2) Найдите частоту следующих событий:
А: выпало чётное число очков;
В: выпало нечётное число очков;
С: выпало число очков, большее трёх.
- 985** Два кубика подбросили 10 раз, при этом событие «выпало 12 очков» не произошло ни разу. Можно ли утверждать, что вероятность этого события равна нулю?
- 986** Какое из следующих событий вам кажется более вероятным:
А: при двух бросаниях монеты 1 раз выпал орёл и 1 раз решка;
В: при двадцати бросаниях монеты 10 раз выпал орёл и 10 раз решка?
- 987** Бросают два игральных кубика. Среди приведённых ниже событий укажите те, вероятность которых равна 0 и вероятность которых равна 1:
А: сумма выпавших очков равна 1;
В: сумма выпавших очков больше 1;
С: сумма выпавших очков не больше 12;
D: произведение выпавших очков больше 40.
- 988** Какова вероятность того, что в классе, где учится 25 человек:
а) хотя бы двое родились в одном месяце;
б) хотя бы трое родились в одном месяце?
- 989** Известно, что среди 1000 выпущенных лотерейных билетов 100 выигрышных. Какое наименьшее количество лотерейных билетов надо купить, чтобы выиграть с вероятностью, равной 1?

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

1. Какие эксперименты называют экспериментами со случайными исходами? Приведите примеры.
2. Что называется частотой случайного события?
3. Как оценить вероятность случайного события? В каких границах находится вероятность случайного события? Вероятность какого события равна 1? равна 0?
4. Покажите, как на вероятностной шкале расположены по отношению друг к другу события A , B , C , D , E , если известно, что $P(A) = 0,5$, событие B — маловероятное, событие C — очень вероятное, событие D — практически невероятное, $P(E) = 1$.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- 1 Баскетболист на тренировке учился бросать мяч в кольцо. Выполнив 50 бросков, он попал в кольцо 36 раз. Какова частота попаданий в кольцо на тренировке?
- 2 В магазине подсчитали, что на каждую 1000 проданных телефонов приходится 6 неисправных. Какова вероятность того, что купленный телефон будет исправен?
- 3 Перебрав цветки подаренной ей ветки сирени, девушка обнаружила три пятилепестковых цветка. Сколько примерно цветков на этой ветке, если известно, что вероятность того, что в выбранном наугад цветке сирени пять лепестков, равна 0,01?

Проверьте себя (тест)

- 1 Частотой случайного события в серии экспериментов называют:
 - 1) число экспериментов, в которых это событие произошло
 - 2) разность общего числа проведённых экспериментов и числа экспериментов, в которых это событие произошло
 - 3) отношение числа экспериментов, в которых это событие произошло, к общему числу проведённых экспериментов
 - 4) отношение общего числа проведённых экспериментов к числу экспериментов, в которых это событие произошло
- 2 Ваня в течение года получил 52 отметки по алгебре, из них 13 отметок – пятёрки. Какова частота события «Ваня получил пятёрку по алгебре»?
- 3 Игральный кубик подбросили 500 раз. Результаты представлены в таблице:

Количество выпавших очков	1	2	3	4	5	6
Число наступлений события	74	81	90	85	91	79

Какова частота наступления события «выпало не менее пяти очков»? Ответ дайте в процентах.

- 4 Каким числом не может выражаться относительная частота случайного события?
 - 1) 0
 - 2) 0,5
 - 3) 1
 - 4) 1,5

5. Прошлой зимой в городе Оладыно относительная частота простудных заболеваний составила 12%. Сколько человек заболело, если в городе проживает 60 тыс. человек?
6. По статистике из каждых 10 000 батареек 6 неисправны. Какова вероятность купить неисправную батарейку? Ответ дайте в процентах.
7. Среди данных событий укажите то, вероятность которого равна 0,5.
 - 1) при бросании кнопки она упадёт на остриё
 - 2) при бросании игрального кубика выпадет 6 очков
 - 3) при бросании монеты выпадет орёл
 - 4) при бросании металлической крышки от бутылки она упадёт зубцами вверх

Ответы

Глава 1

7. $\frac{12}{25}$ — наименьшая, $\frac{21}{40}$ — наибольшая. 16. 56 дробей; $\frac{11}{37}$ — наименьшее число, $\frac{37}{11}$ — наибольшее число; восемь. 17. а) $1 \leq x \leq 4$, $x \in N$; б) $x \geq 4$, $x \in N$; в) $6 \leq x \leq 49$, $x \in N$; г) $1 \leq x \leq 39$, $x \in N$. 18. Утверждения 1 и 4. 21. а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{5}{18}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{20}{11}$; е) $\frac{1}{15}$. 22. а) 0,5; б) $3\frac{1}{3}$; в) 0,06; г) 0,02. 25. а) -1; б) $\frac{5}{14}$; в) 17,5; г) $-\frac{5}{9}$. 27. а) -0,32; б) $\frac{3}{7}$; в) 0,6; г) $-\frac{1}{9}$. 28. в) 1,5; г) -0,25. 30. а) 3; б) -3. 32. 3). 43. б) a^{11} ; a^{19} ; a^{m+n} ; a^{x+y+1} . 45. Получатся выражения: $(30 : 5) - 10^3$, $(30 : 5 - 10)^3$, $30 : (5 - 10)^3$, $30 : (5 - 10^3)$. 46. б) -17,42; г) -20,1; д) -19; е) 1,6. 49. 3). 53. а) 533 см^3 ; б) $1,3 \text{ м}^3$. 57. $1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$; $1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$; $1 \text{ мк} = 10^{-6} \text{ м}$. 64. $n = 4$; $n = 7$; $n = 10$; $n = 14$; $n = 17$; $n = 20$. 66. Первым способом — 2500 р., вторым способом — примерно 321 тыс. р. 67. 6,4 мм. 68. 3) $\frac{1023}{1024}$. 72. а) 15 000 р.; б) 17 500 р. 73. а) 48 упаковок; б) 34 учащихся. 74. а) Можно; б) будет. 75. б) 160 мест. 76. б) 4 кг. 78. б) 663 кВт · ч. 81. б) Неверный; цена повысилась почти на 56%. 83. а) 200 детей; б) 130 пассажиров. 84. 60 кг. 85. а) 11%; б) 14%. 86. а) 26%; б) 27%. 88. а) 42% всего пути; б) 60% бака. 89. а) 22%; б) 10,4%. 90. б) На 25%; в) на $16\frac{2}{3}\%$. г) на $9\frac{1}{11}\%$. 96. Средняя посещаемость 16 000 человек. 101. 1) Среднее арифметическое — 3,3; мода — 4. 102. Мода — 4; среднее арифметическое — 3,7. 103. 1,2; 1. 105. а) 5,4; 8; б) 6,5 тыс. книг. 108. 3^{10} — цифрой 9, 3^{15} — цифрой 7, 3^{120} — цифрой 1, 3^{126} — цифрой 9. 110. 2^{102} . 112. Например, 6, 46, 5, 15, 21. 113. Числа m и n или оба чётные, или оба нечётные. 114. Все три числа делятся на 10. 118. а) $2\frac{1}{6}$; б) $\frac{4}{21}$. 119. а) -1,45; б) -1,25. 120. а) -7,3; б) 1,25. 122. а) -1,6; -200; б) -25,2; $5\frac{5}{6}$. 124. а) $-0,11 < (-0,11)^3 < (-0,11)^4 < (-0,11)^2$. 125. а) 1,6 кг; б) 6,25 кг. 126. б) На 20 000 р. 127. 840 спортсменов. 128. 140 р. 129. 17 игр. 131. 60 кг. 132. 750 мест. 133. 20 кг. 135. 11,5%. 139. а) 40; б) $x = 15$. 140. а) 6; б) 3. 141. 14,4.
- Тест. 1. 3). 2. 2). 3. $\frac{1}{6}$. 4. 1) и 4). 5. 9,9. 6. 4). 7. 1). 8. -0,27. 9. 3). 10. 1). 11. А2, Б4, В1, Г3. 12. На 300%. 13. На 75%. 14. 3). 15. 1). 16. 3).

Глава 2

144. а) $V \approx 25,2 \text{ см}^3$; $V \approx 201,6 \text{ см}^3$; б) $S = 286 \text{ см}^2$; в) $V = 3500 \text{ см}^3$.
 147. а) За 45 с; б) 50 км/ч. 151. $S = 0,33t$. 152. $v = \frac{ln}{t}$; 5 км/ч. 153. $N = 5 + 16(n - 1)$; 229 ступенек. 154. На 20 км/ч. 168. б) 8 компакт-дисков.
 169. б) За 20 с. 172. а) 444 страницы; б) 270 г. 173. а) 15 дней; б) 60 мин.
 174. На 33%. 175. На 20%. 176. а) Увеличились в 1,8 раза; б) увеличились в 1,2 раза; в) уменьшается в 2,5 раза. 183. а) 9,4 см; б) 3,2 см.
 186. 4). 189. г) $x = 4$, $x = -4$. 191. а) $A_1B_1 = 1,8 \text{ см}$; $D_1E_1 = 1,2 \text{ см}$; $BC = 3 \text{ см}$; $CD = 4 \text{ см}$; в) $P : P_1 = 5 : 3$. 192. б) На 10 км/ч. 193. 60 г; 180 г.
 194. Через 2,1 ч. 195. а) 6 рабочих; б) 1 трубу. 196. а) 90 страниц, 240 страниц; б) 6 км. 200. 2) $\frac{xa}{a+b+c}$, $\frac{xb}{a+b+c}$, $\frac{xc}{a+b+c}$. 201. 12 000 р., 18 000 р. и 24 000 р. 202. Шалфей — 20%, ромашка — 50%, валериана — 30%.
 203. 40%, 26%, 34%. 205. 50 г, 100 г и 200 г. 206. 20 000 р., 10 000 р. и 2000 р. 208. $AB = 3 \text{ см}$, $BC = 5 \text{ см}$, $AC = 7,5 \text{ см}$. 209. 6000 р., 4000 р., 2400 р. 211. За 12,5 ч. 213. На 6 человек. 216. $x : y = 4 : 5$. 217. $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.
 221. 4 ч 30 мин. 222. За 30 мин. 224. а) 252 ученика; б) 64, 80, 72 и 72 учащихся. 225. 5,5 см. 226. Медь — 16%, олово — 60%, сурьма — 24%; 2 кг. 227. 168, 224 и 196 тетрадей.
 Тест. 1. $62,8 \text{ см}^2$. 2. 2). 3. $h = \frac{2S}{a}$. 4. 72 км/ч. 5. А, В. 6. 0,4 расстояния. 7. 3). 8. 1), 2). 9. 3). 10. 2). 11. 1). 12. 16,8 см.

Глава 3

239. $a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$. 261. а) $\frac{5}{9}M$; б) $0,16x$. 266. $15n + 105$. 267. а) $5a + 20$; б) $10a + 90$. 268. а) $6a^3b^5$; в) a^3c^2 ; д) $-x^3z^2$; е) a^3b^4 . 271. а) $S = ab - 2cd - c^2$; б) $S = ab - 6cd$. 276. в) $3n$; г) $5n$. 278. а) $3x - 2$; 43; 67. 284. б) $2b - 1\frac{1}{2}$; в) $m^2 + 1$; г) 3. 286. а) $b - a - 2$; б) $2m$. 288. б) $2x + 3$; в) $a - 10$. 291. $N + 9$.
 292. а) $A + 18$; б) $A + 15$. 297. г) $-\frac{1}{3}$; д) 0; е) $-0,5$. 298. д) $2bc - abc$; е) $1 - 13z$.
 299. в) $y - x$; г) $-2xyz$. 300. а) 2,8; б) 2,4. 306. а) $7n - 5$. 307. а) $4a + 2 \text{ км}$; б) $120n + 240 \text{ с}$. 311. б) $2(k - a) - (k - a) = k - a$; г) $ab + (1 - a)b + 1 = b + 1$.
 312. в) $3 - 2m$; г) $2c - b$. 313. $3,42n \text{ р}$. 314. Увеличилась на 20%. 315. $5a - 40t \text{ км}$. 327. б) $\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z$; в) $-0,5a$; г) $\frac{1}{4}b + 1$. 328. а) $-6,2$; $-13,7$; б) $-\frac{1}{3}$; 0,8; в) $-0,1$; 0,1. 334. $5,5x + 1,5 \text{ м}$. 335. $8n - 84$.

- Тест. 1. 3). 2. 2). 3. 1). 4. $2m + p - 12q$. 5. А2, А3, Б1, Б4. 6. 4). 7. $6x^2yz$. 8. $\frac{n}{2}$. 9. 2). 10. 1), 3), 4). 11. 3). 12. 3). 13. $2yz - xy$. 14. $a - 4$. 15. 1). 16. $150 - 18n \text{ с}$.

Глава 4

347. Пусть некто имел x рупий. Получим уравнение $\frac{x+100}{2} + 100 + 10 =$
 $= 6(x-10)$. 359. г) -12; д) -25; е) 2; ж) 0; з) $\frac{7}{2}$. 360. в) 9; д) $3\frac{1}{3}$; е) 20;
 и) 0,5. 364. в) -12,5; г) -1; д) 2; е) 40. 367. г) 7; д) -6; е) 25. 368. б) 24;
 г) 5; е) -5; з) -110. 369. д) 42; е) -18; ж) 10; з) 32. 372. а) $x=7$; б) $x=3$.
 374. а) -4; б) 4; в) -120; г) -1,6; д) -3,6; е) 0. 377. 13,5. 383. 144, 48 и
 12 гульденов. 388. а) 48 и 60; б) 54 и 120. 389. б) За 4 ч. 391. 150 км.
 393. 6 км. 394. 2,4 км. 395. 1 км. 396. 48 км. 398. 6 кг. 399. 15 кг.
 402. б) 4,5 кг, 3 кг, 3,5 кг и 3,5 кг. 403. а) 2 ч; б) 10 км. 404. а) 3 и 5 м;
 б) 120 м. 405. а) 5,5 и 4,4 м; б) 4,5 и 5,4 м. 406. б) 100 р. 409. 36 гусей.
 410. 28 учеников. 411. 10 вёрст. 412. 1,75 р. 414. а) -7 и 5; б) -3 и 2.
 415. -3 и 4. 416. 2. 418. 8. Пусть x — число участников турнира, получим
 уравнение $x(x-1) = 56$. 422. а) -1; б) 2. 423. а) 15; в) -36. 424. а) 4;
 б) 2,4. 425. а) Да; x — любое число; б) нет. 428. На мячи — по 1200 р.; на
 скакалки — 480 р. 429. 160 р. и 184 р. 431. 10 друзей; мяч стоит 240 р.
 432. 0,75 кг и 0,25 кг. 433. 8 лет. 434. а) Антону 6 лет, брату 10 лет;
 б) Ольге 28 лет, мужу 36 лет, сыну 7 лет, дочери 2 года. 435. а) 30 лет
 и 10 лет; б) 27 лет и 3 года.

Тест. 1. 3). 2. А2, Б1, В3. 3. 25. 4. -5,5. 5. 2). 6. 4). 7. 35 л и 70 л.
 8. 300 р. 9. 3). 10. $a=4,5$. 11. 2). 12. 2).

Глава 5

453. б) $\frac{1}{6}$; в) 0,07. 454. а) 2,8. 455. а) -5 или 3; б) -4 или 8. 456. 1,5; 7;
 12,5. 465. а) $a=-1$. 469. д) $-2 \leq x \leq 0$ и $-2 \leq y \leq 0$; е) $-2 \leq x \leq 2$ и
 $-1 \leq y \leq 1$. 471. а) $x \leq 1$ и $y \leq 0$; б) $x \leq -1$ и $y \geq 0$. 474. б) Прямая $x=-1$.
 475. $-5 \leq y \leq -2$. 482. а) $y = \frac{1}{2}x$; б) $y = x + 1$. 483. $y = -\frac{1}{2}x$. 485. Указание.
 Из равенства $y^2 = x^2$ следует, что $y = x$ или $y = -x$. 500. $y = -x^2$. 504. г) Че-
 рез 30 мин и через 3 ч; д) 2,5 км/ч — на подъёме; 6 км/ч — на спуске.
 505. б) 12 км/ч; в) в третьем рейсе. 506. в) За февраль тираж вырос при-
 мерно на 500%; за весну — примерно на 60%; г) самый быстрый рост —
 в феврале; самый медленный — в августе. 507. г) 5 ч, 20 км, 4 км/ч;
 д) Андрей. 510. б) Там, где одна кривая «идёт вверх», другая «опускается
 вниз» и наоборот. 511. Указание. Данные условия можно записать так:
 а) $y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq 0 \\ -2x, & \text{если } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$ 515. а) $x \geq \frac{1}{2}$; б) $x \leq 0$.
 517. а) $x \geq -2$ и $-1 \leq y \leq 4$; б) $-3 \leq x \leq 3$ и $y \leq 5$. 518. а) $-3 \leq x \leq -1$

и $1 \leq y \leq 2$; б) $1 \leq x \leq 3$ и $-2 \leq y \leq -1$; в) $-3 \leq x \leq -1$ и $-2 \leq y \leq -1$.
 519. а) $|x| \leq 2$ и $|y| \geq 3$; б) $|x| \geq 2$ и $|y| \geq 3$.

Тест. 1. А4, Б1, В3, Г2. 2. 3). 3. М(1). 4. А3, Б1, В2. 5. 1). 6. 4). 7. А2, В3, Б1, Г4. 8. А5, Б3, В1, Г2, Д4. 9. 1).

Глава 6

527. в) 5^{n+3} ; г) 2^{2n+1} ; д) 7^{2k+2} ; е) 10^{3k} . 528. а) $-x^3$; б) x^3 ; в) x^3 ; г) $-x^4$; д) $-x^5$; е) x^4 . 534. а) x^{n-2} ; б) x^n ; в) x ; г) x^{n-1} . 536. в) 25; г) 100.
 539. в) 1600; г) 2000. 541. д) $-4m^4n^4$; е) $-2c^5d^2$; ж) $-24a^6b^5$; з) x^4y^3 .
 542. б) $3,2a^4b^4c^4$; г) $-ac^6d^2$; е) x^2yz^2 . 548. а) 25; б) 2; в) $\frac{9}{4}$. 551. а) y^2 ; б) y^{k+2} ; в) y^{5k+1} ; г) y^{2k} . 554. а) x^{n+10} ; б) a^2 ; в) c^{3n} ; г) y . 555. а) 2^4 ; 2^6 ; 2^{n+1} ; 2^{2n} ; б) 3^5 ; 3^7 ; 3^{n+1} ; 3^{2n} . 556. а) 1,25; б) $1\frac{1}{9}$. 563. а) x^{mn} ; x^{n^2} ; x^{2n} ; б) x^{14} ; x^{4n} ; x^{3n+9} . 570. б) $-x^6$; в) x^6 ; г) $-x^6$. 574. а) 125; б) 64; в) 16; г) 1; д) 64; е) 3; ж) $\frac{1}{8}$; з) 1. 576. в) $4m^6n^8$; г) $4y^5z^6$; е) $-a^2c^7$. 577. б) $3x$; г) $-\frac{c^4}{16a^2}$; д) $-\frac{c^3}{3a^3}$; е) $\frac{1}{x^3y^5}$. 579. а) 1; б) $\frac{1}{8}$; в) 3; г) 1. 580. а) $\frac{1}{25}$; б) 1,5; в) 75; г) 125.
 581. а) 16; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{2}{3}$. 583. а) $5^{20} < 55^{10}$; б) $33^{15} > 3^{30}$; в) $10^{30} < 1010^{10}$; г) $10\,001^5 > 100^{10}$. 587. б) $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$. 588. а) $6 \cdot 5 = 30$; б) $101 \cdot 100 = 10\,100$.
 589. а) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$; б) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$. 590. $5^4 = 625$; $4 \cdot 5^3 = 500$; $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. 591. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45\,000$; $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18\,000$; 9000 . 592. а) $\frac{39 \cdot 40}{2} = 780$; б) $\frac{49 \cdot 50}{2} = 1225$. 593. $20 \cdot 19 = 380$. 595. $2^5 = 32$.
 596. $2^8 = 256$. 597. $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4! = 60$. 598. $26 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 26^5$.
 599. а) 24; б) 120; в) 144; г) 2880; д) $5 \cdot 4! = 5! = 120$. 600. а) 8!; б) 7!; в) 10!. 601. $3! = 6$; нет. 602. 6!; 8!. 603. а) $5! = 120$; б) $4! = 24$. 604. а) $4! = 24$; б) $5! - 4! = 96$. 606. а) $\frac{9!}{2}$ (так как две буквы «а»); б) $12! : 2 : 2$ (по две «е», «а»); в) $13! : 2 : 2 : 2 : 2$ (по две «к», «о», «и», «а»).
 607. $7! \cdot 4!$. 608. $5! \cdot 5!$. 609. а) Верно; б) неверно; в) верно. 610. а) Делится на 47, на 99, на 102 ($102 = 2 \cdot 51$); б) 24 нулями. 612. а) В зависимости от того, какие рассадки считать разными, будут получены ответы: 8!; 7!; 7! : 2; б) если все фигуры на карусели разные, то 10!; если все кресла одинаковые, то 9!. 613. 11!. 614. $19! : 2$. 618. а) $\frac{4}{9}$; б) 27; в) -0,002; г) -0,5.
 619. а) 2^{2n+4} ; б) 2^{3n+3} ; в) 5^{2n+15} ; г) 9^{4n+4} . 620. б) $-x^3$; г) $-x^3$. 621. а) 25с; б) $6a^2$; в) $\frac{y}{2}$; г) $\frac{p^3}{27}$. 624. Да. 625. $3 \cdot 4! = 72$. 626. $9 \cdot 9 \cdot 10^6$. 627. 6!; $4 \cdot 5!$

чётных, $2 \cdot 5!$ нечётных. **628.** а) $5!$; б) $4!$; в) $5!$; г) $2 \cdot 5!$. **629.** $3! \cdot 3! \cdot 2$. **630.** 4^{10} ; 3^n ; m^n . **631.** а) 6^5 ; б) 5^5 ; в) $6^5 - 5^5$. **632.** $9000 - 5^4$. **633.** $9\,000\,000\,000 - 9 \cdot 9!$.

Тест. 1. a^6b^4 . 2. a^{n+2} . 3. 2). 4. 1). 5. А3, Б4, В2, Г5. 6. 15 625. 7. $\frac{1}{9}$. 8. 4).
9. $-8a^{60}c^{36}x^3$. 10. 1). 11. 1). 12. 3). 13. $\frac{1}{49}$. 14. 2). 15. 3). 16. 4). 17. 1).
18. 20. 19. 56. 20. 2).

Глава 7

639. б) $-1,25$. **641.** в) 54 ; г) 4850 . **648.** б) $42\,925$. **649.** б) $1\,625\,625$.
674. $t - s = 31$, $s - t = -31$. **675.** $a - c = x + y$, $c - a = -x - y$. **678.** в) $222a +$
 $+ 222b + 222c$. **692.** б) 2 ; в) $\frac{3}{14}$; г) 0 . **696.** а) 3 ; б) $5\frac{2}{3}$; в) $-1,5$; г) $0,1$.
701. а) $27,5$; б) $1,5$; в) -50 . **709.** а) $y^3 + y^2 - 3y + 1$; в) $a^3 + b^3$. **710.** а) $-2x^2 -$
 $- 3x + 13$; б) $m^2 - 5mn + n^2$; в) $u^2 + u + v - 1$. **711.** а) -20 ; б) 99 . **712.** а) $5n^2 -$
 $- 3n - 4$; б) $-4x^2 - 6xy + 4y^2$; в) $12a + 10$; г) $13c^2 - 17cd + 3d^2$. **715.** а) $x^4 -$
 $- 2x^2 + 1$; в) $y^4 - 13y^2 + 4$. **716.** а) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$; б) $2x$; в) $y^5 - 1$;
г) $n^5 + 1$. **717.** а) $\frac{5}{11}$; б) $\frac{7}{8}$. **720.** а) $7x^2 - 21x + 11$; б) $-10n^2 + 70n - 30$.
721. а) 2 ; б) $-7\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $-\frac{1}{2}$. **734.** в) $k = 8$ или $k = -8$; г) $k = 10$ или
 $k = -10$. **737.** а) 4 ; б) $3,5$; в) 9 ; г) $3,5$. **744.** в) $10x^2 - 23x + 11$; г) $2a^2 - 6a$.
745. а) $m^2 + n + 8$; б) 25 . **750.** а) $(2a - b)^2$; б) $(2x + 2y)^2$. **756.** а) $4,25$; б) 6 .
759. а) 180 км от А и 120 км от В; б) $0,9$ км. **761.** а) $\frac{3}{4}$ ч, 3 км; б) 60 км/ч,
 480 км. **763.** а) 3 ч, 60 км; б) 90 м/мин. **764.** б) 225 см². **765.** а) 24×24 см,
 32×18 см; б) 8100 м². **766.** а) 80 страниц; б) 10 дней и 6 дней, 480 стра-
ниц. **767.** а) Через 8 дней; б) 4 года и 8 лет. **768.** 70 км/ч. **769.** $1,9$ ч,
 $2,3$ ч. **770.** $\frac{1}{3}$ ч, $1\frac{2}{3}$ ч. **772.** 2 ч. **773.** 30 км/ч. **774.** 5 км/ч, 15 км/ч.
775. 20 км. **776.** 2 км. **778.** 19×35 см. **779.** 1200 л. **783.** а) 9 ; б) 5 .
788. Числа вида $6k + 1$ и $6k + 5$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. **790.** а) Числа вида
 $10k + 9$, где $k = 0, 1, 2, \dots$; б) числа вида $10k + 8$, где $k = 0, 1, 2, \dots$.
792. а) $-1,51, -0,96$; б) $-1,3, -0,8$. **794.** а) $4\frac{1}{2}, 4\frac{2}{9}$; б) $3,2, -6,5$. **795.** в) $-19b^3c^3$;
г) $m^6 + n^6$; д) $x^6 + y^6$; е) $9y^4z^2 + 9y^2z^4$. **799.** 3 ч, 105 км. **800.** $3\frac{1}{3}$ мин.
802. 27 и 48 деталей. **804.** 40 и 60 пакетов в час. **805.** 30 страниц.
806. 90×210 см. **807.** 19×25 см. **810.** 30 учеников.

Тест. 1. $-\frac{1}{8}$. 2. 3). 3. 3). 4. $3x^2y - 4xy^2 + 2xy$. 5. 3). 6. 2). 7. 1). 8. $2x^3 - x^2 - 1$. 9. $2ab - 2bc$. 10. $10a$. 11. 3). 12. $8a^2 - 18$. 13. 3). 14. 4). 15. $3m^2 + 12$. 16. 4). 17. 4). 18. $-\frac{1}{3}$. 19. 2). 20. 1).

Глава 8

814. а) 5800; б) 0. **823.** д) $\frac{2c}{3a}$; е) $\frac{n}{a}$; ж) $\frac{x}{x+y}$; з) $\frac{a-b}{3}$. **824.** а) 2; б) -0,1; в) 90; г) 2,6. **827.** а) -4; б) $-\frac{1}{9}$. **831.** а) $(x-y)(2+x-y)$; в) $(x-y)^3$; д) $m(m-n)^2$. **833.** а) $\frac{4}{3}$; б) $-\frac{4}{3}$; в) $\frac{1}{4}$. **842.** в) $(3a-b)(b+a)$; г) $(2y-1)(3y+a)$; ж) $(4x+1)(2x^2+1)$; з) $(5c-1)(a^3+b)$. **843.** а) 162; б) 50; в) 0; г) 0. **844.** в) $(a-b-1)(x+y)$; д) $(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)$; е) $(x+qy+pq)(px+q)$. **846.** а) $(a+b)(a+4b)$; б) $(c-b)(c-3b)$; в) $(b+2)(b+3)$; г) $(c-3)(c-4)$. **854.** а) $\frac{1}{a-b}$; в) $\frac{a+1}{b}$; д) $\frac{x-y}{x+y}$. **859.** в) $4b^2 - 3c^2$; г) $1 - 10k^2$. **860.** а) $2a^2 - 2a - 1$; б) $x^2 + 4x - y^2$; в) $14c^2 + 5c - b^2$; г) 5; д) $2ab - 2b^2$; е) $4a + 2$. **861.** а) $a^3 - a$; б) $-2x^2 + 8$; в) $2bc^2 - 2b^3$; г) $3ab^2 - 3a$. **862.** а) 0,6; б) 19; д) 0,4; е) 9. **864.** а) $(a+b)(1+a-b)$; г) $(x-2)(x+1)$; д) $2(1-y)$. **867.** а) $-a-9$; б) $-6x-20$; в) $2x^2-11$. **868.** а) $x^4 - y^4$; б) $a^4 - 1$; в) $1 - a^8$; г) $x^{16} - 1$. **870.** а) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; б) $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$; в) $a^4 - 4a^2 + 4a - 1$; г) $x^4 + 4$. **877.** а) $2a^3$; б) 16; в) $27 - y$; г) $17x$. **879.** а) $2y(3x^2 + y^2)$; б) $2a(a^2 + 3b^2)$; в) $18(n^2 + 3)$; г) $2m(m^2 + 3)$. **883.** а) $a^6 - b^6$; б) $x^{12} - 1$; в) $x^6 - y^6$; г) $a^6 + 2a^3b^3 + b^6$. **884.** ж) $3a(n-3)(n+3)$; и) $x(x-3)(x+3)$; м) $10b(2-b) \times (2+b)$. **887.** б) $x^2(x-1)(x+1)$; в) $(n-2)(n+2)(n^2+4)$; д) $(1-c)(1+c) \times (1+c^2)$. **888.** а) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$; е) $(a-1)(a+1)(a^2-a+1) \times (a^2+a+1)$. **889.** а) $y(x+y)^2$; в) $-a(3y+1)^2$. **892.** а) $(a+b)(a-b)^2$; б) $-(x+y) \times (x-y)^2$; в) $(a+n)(n-1)(n^2+n+1)$; г) $(a-b)^3$. **893.** а) $(x+y)(a-x-y)$; в) $(a-b+c)(a+b-c)$; д) $m(a-m-1)(a+m+1)$. **894.** а) $(x-3)(x+5)^2$; в) $(a-5)(a+5)(a-1)^2$. **895.** а) $(a-x)(x-y)(y-a)$; б) $(a-x)(x-y)(y-a) \times (a+x+y)$. **899.** 3) $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) \dots (x^{2^9}+y^{2^9})$. **903.** а) 2; -2; г) 5; -5. **904.** а) 0; 1; -1; г) 0; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$. **905.** а) 0,5; б) 5. **907.** а) 7; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; -4; г) -4; -2. **908.** а) 1; -0,25; г) 3; -1. **912.** а) m ; $-m$; в) $a-4$; $-a-4$. **913.** а) $(a-1)(a^2-4a+5)$; б) прибавьте и вычтите $4y^4$. **914.** а) $(n^2-n+1) \times (n^2+n+1)$; б) $(n^4-n^2+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$. **915.** 1; -1. **919.** а) $3 \cdot 2^n$; б) $-24 \cdot 5^{n-1}$; в) $3^n(3^n-1)$; г) $7(7^n+7^{n-1}+1)$. **924.** а) $(x+y+z)(xy+xz+yz)$;

- б) $(a + b + c + 1)(ab + bc + ac)$. 926. а) $(a^n - 1)(a^n + 1)$; б) $(2 - x^n)(2 + x^n)$.
 931. а) $2(x - y)(x + y)(x - 3)$; в) $36(x - 2)(x + 2)(x - 1)$. 932. а) $\frac{1}{a+1}$; б) $\frac{x+y-z}{x-y+z}$.
 933. а) $(x - z)(y - z)(x - y)$; б) $(z - x)(y - x)(y - z)$. 934. а) 2; -1,5; б) -0,5; -1;
 в) 3; -2,5; г) -1. 936. а) 30; -30; б) 12; -12. 937. а) 0; 2; б) 0; -6; в) $\frac{1}{3}$;
 г) -2; 2; 4.

- Тест. 1. 4). 2. 3). 3. $\frac{x-2}{x}$. 4. 1) и 2). 5. 1). 6. 1) и 2). 7. $(x - 3)(xy - z)$. 8. 1).
 9. $(0,5xy - z)(0,5xy + z)$. 10. 2). 11. 1). 12. 3). 13. 3). 14. $(y - 3)(y + 3)(y^2 + 9)$.
 15. 4). 16. 3). 17. 3). 18. 0; 3; -3.

Глава 9

943. У Бориса. 945. а) Верно; б) верно; в) неверно. 948. Шансы событий:
 $A - \frac{1}{6}$; $B - \frac{5}{6}$; $C - \frac{1}{2}$; $D - \frac{1}{3}$. События в порядке возрастания шансов:
 A, D, C, B . 952. Вертушки 1 и 2, для них шансы равны; шанс для
 вертушки 3 меньше. 954. Шансы события B выше. 955. Неверно. 956. На
 рисунке 2. 957. При $n = 1, 2$ — невозможны, при $n = 9, 8, 7$ — достоверны.
 959. $\frac{67}{92} \approx 0,73$; $\frac{25}{92} \approx 0,27$. 965. а) 1430; б) 1330. 966. 180. 967. 600.
 970. 0,003; 0,997. 974. Нельзя. 975. Нельзя. 981. 1500. 984. 2) Событие
 $A - 48\%$; событие $B - 52\%$; событие $C - 54\%$. 985. Нельзя. 988. а) 1;
 б) 1. 989. 901 билет.

- Тест. 1. 3). 2. 0,25. 3. 34%. 4. 4). 5. 7200. 6. 0,06%. 7. 3).

**Таблица квадратов
натуральных чисел от 10 до 99**

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Предметный указатель

Абсцисса 134

Алгебра 110

Алгебраическая сумма 79

Алгебраический способ решения задач 103

График зависимости 140

Законы алгебры 79, 97

Координата точки

на прямой 127

Корень уравнения 107

Коэффициент произведения 81

Кубическая парабола 144

Многочлен 188

Многочлена свободный член 189

— стандартный вид 189

Мода 30

Обратно пропорциональные величины 51

Обратной пропорциональности свойство 52

— — формула 52

Одночлен 188

Ордината 134

Парабола 143

Переменная величина 45

Перестановки 178

Правила преобразования уравнений 110

— раскрытия скобок 86

Правило выражения десятичной дроби в процентах 22

— — процентов десятичной дробью 22

— преобразования произведений 80

— — сумм 79

— приведения подобных слагаемых 90

— сравнения обыкновенных дробей 6

— умножения комбинаторное 174

— — многочлена на многочлен 201

— — одночлена на многочлен 197

Преобразование буквенного выражения 79

Пропорции основное свойство 58

Пропорция 57

Прямо пропорциональные величины 50

Прямой пропорциональности свойство 51

— — формула 51

Разложение многочлена на множители 226

— — — — вынесением общего множителя за скобки 226

— — — — способом

группировки 231

Размах 31

Распределительное свойство 74

Расстояние между двумя точками координатной прямой 132

Свойства степени с натуральным показателем 164, 168, 169

— числовых равенств 109

Свойство сложения переместительное 73

— — сочетательное 73

Свойство умножения
переместительное 74
— — сочетательное 74
Среднее арифметическое 30
Степень с натуральным
показателем 14, 163
Тождественно равные выражения 79
Уравнение 103
— линейное 111

Числовые промежутки 129
Факториал 178
Формула квадрата
разности 205
— — суммы 205
— разности квадратов 233
— — кубов 237
— суммы кубов 238
Формулы сокращённого
умножения 206

Оглавление

Предисловие	3
-------------------	---

Глава 1. Дроби и проценты



1.1. Сравнение дробей	5
1.2. Вычисления с рациональными числами	10
1.3. Степень с натуральным показателем	14
1.4. Задачи на проценты	21
1.5. Статистические характеристики	30
1.6. Последняя цифра степени (Для тех, кому интересно)	36
Дополнительные задания	37
Чему вы научились	40

Глава 2. Прямая и обратная пропорциональность



2.1. Зависимости и формулы	44
2.2. Прямая пропорциональность. Обратная пропорциональность ..	50
2.3. Пропорции. Решение задач с помощью пропорций	57
2.4. Пропорциональное деление	64
2.5. Задачи на «сложные» пропорции (Для тех, кому интересно) .	66
Дополнительные задания	68
Чему вы научились	70

Глава 3. Введение в алгебру



3.1. Буквенная запись свойств действий над числами	73
3.2. Преобразование буквенных выражений	78
3.3. Раскрытие скобок	85
3.4. Приведение подобных слагаемых	89
3.5. Ещё раз о законах алгебры (Для тех, кому интересно)	95
Дополнительные задания	98
Чему вы научились	100

Глава 4. Уравнения



4.1. Алгебраический способ решения задач	103
4.2. Корни уравнения	107
4.3. Решение уравнений	109
4.4. Решение задач с помощью уравнений	115
4.5. Некоторые неалгоритмические приёмы решения уравнений (Для тех, кому интересно)	121
Дополнительные задания	123
Чему вы научились	124

Глава 5. Координаты и графики

5.1. Множества точек на координатной прямой	127
5.2. Расстояние между точками координатной прямой	131
5.3. Множества точек на координатной плоскости	134
5.4. Графики	139
5.5. Ещё несколько важных графиков	143
5.6. Графики вокруг нас	148
5.7. Графики зависимостей, заданных равенствами с модулями (Для тех, кому интересно)	156
Дополнительные задания	—
Чему вы научились	160

Глава 6. Свойства степени с натуральным показателем

6.1. Произведение и частное степеней	163
6.2. Степень степени, произведения и дроби	168
6.3. Решение комбинаторных задач	174
6.4. Перестановки	177
6.5. Круговые перестановки (Для тех, кому интересно)	181
Дополнительные задания	182
Чему вы научились	185

Глава 7. Многочлены

7.1. Одночлены и многочлены	188
7.2. Сложение и вычитание многочленов	193
7.3. Умножение одночлена на многочлен	197
7.4. Умножение многочлена на многочлен	201
7.5. Формулы квадрата суммы и квадрата разности	205
7.6. Решение задач с помощью уравнений	211
7.7. Деление с остатком (Для тех, кому интересно)	218
Дополнительные задания	219
Чему вы научились	222

Глава 8. Разложение многочленов на множители

8.1. Вынесение общего множителя за скобки	226
8.2. Способ группировки	231
8.3. Формула разности квадратов	233
8.4. Формулы разности и суммы кубов	237
8.5. Разложение на множители с применением нескольких способов	240
8.6. Решение уравнений с помощью разложения на множители	243
8.7. Несколько более сложных примеров (Для тех, кому интересно)	245
Дополнительные задания	247
Чему вы научились	250

Глава 9. Частота и вероятность

9.1. Случайные события	253
9.2. Частота случайного события	260
9.3. Вероятность случайного события	266
9.4. Сложение вероятностей (<i>Для тех, кому интересно</i>)	270
Дополнительные задания	271
Чему вы научились	272
Ответы	275
Справочный материал	282
Предметный указатель	283

Учебное издание

Дорофеев Георгий Владимирович
Суворова Светлана Борисовна
Бунимович Евгений Абрамович
Кузнецова Людмила Викторовна
Минаева Светлана Станиславовна
Рослова Лариса Олеговна

АЛГЕБРА

7 класс

Учебник для общеобразовательных организаций

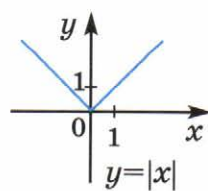
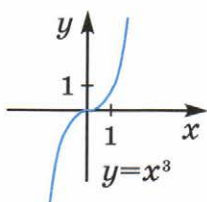
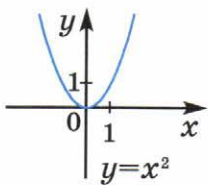
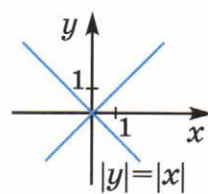
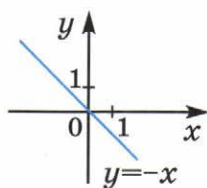
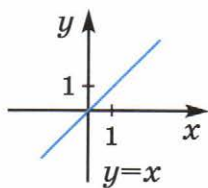
Зав. редакцией *Т.А. Бурмистрова*
Редактор *Л.В. Кузнецова*
Младшие редакторы *Е.А. Андреевкова, Е.В. Трошко*
Художник *О.П. Богомолова*
Художественный редактор *О.П. Богомолова*
Компьютерная графика *К.В. Кергелен, С.А. Крутикова*
Компьютерная верстка и техническое редактирование
И. Ю. Соколовой, О.В. Храбровой, Е. В. Семериковой
Корректоры *Н. В. Бурдина, О.В. Крупенко*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 23.04.14. Формат 70×90^{1/16}. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 15,45+0,51 форз. Доп. тираж 10 000 экз. Заказ № 38251 (п-гз).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат» ОАО «Издательство «Высшая школа». 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1. Тел.: +7(4812)31-11-96. Факс: +7(4812)31-31-70. E-mail: spk@smolpk.ru <http://www.smolpk.ru>

Графики



Степени

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729				
4^n	4	16	64	256	1024					
5^n	5	25	625	3125						

Свойства степени с натуральным показателем

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$